





—



5.3 247

5-2-247

11



200

5. 4.  
61

ELEMENTI GENERALI  
DELLE PRINCIPALI PARTI  
D E L L E  
M A T E M A T I C H E,

NECESSARJ ANCORA ALL' ARTIGLIERIA,  
E ALL' ARTE MILITARE.

Del Signor Abate D E I D I E R,

*Professor Regio di Matematiche nelle Scuole d' Artiglieria DE LA FERRE.*

TRADUZIONE DAL FRANCESE

DI ARDUINO, E MATTEO DANDOLO

NOBILI VENETI.

T O M O S E C O N D O :



I N V E N E Z I A,  
M D C C L X I.

A P P R E S S O M O D E S T O F E N Z O,  
C O N L I C E N Z A D E S U P E R I O R I, E P R I V I L E G I O.



5. 9. 1977



# ELEMENTI DELLE PRINCIPALI PARTI DELLE MATEMATICHE.

CONTINUAZIONE DEL LIBRO SECONDO.

## CAPITOLO OTTAVO.

*Della Trigonometria, della Longimetria, e del Livellamento.*

321.



A *Trigonometria* è la scienza, che fa conoscere tutti i lati e gli angoli d'un triangolo mediante la cognizione d'alcune di queste cose.

322. S'osservi bene, che fra le cose note esser vi dee almeno uno de' lati; poichè ho già dimostrato (N. 101.), che due, o più triangoli esser possono equiangoli senza essere equilateri.

323. Dato un'angolo acuto  $ABC$  (Fig. 203.), il suo conseguente  $ABE$  dicesi *Compimento* a due retti dell'angolo  $ABC$ , e l'angolo  $DBA$ , il quale manca all'angolo  $ABE$  per valere un retto, dicesi *Compimento* all'angolo  $ABC$ .

Convien porre attenzione a queste due sorte di compimenti, acciò non nasca qualche equivoco.

A 2

324. E.

324. Essendo l' vertice B dell'angolo ABC al centro d' un circolo, la perpendicolare AS, tirata dall'estremità A dell'uno de' suoi lati sopra l'altro BC, diceli *seno retto*, o semplicemente *seno* dell'angolo ABC, o dell'arco AG; la parte SG, segata da questa perpendicolare dalla banda della circonferenza, diceli *seno verso*; il lato BA, o BG diceli *seno intero*, *seno tutto*, o *raggio* del circolo; la perpendicolare RC, alzata all'estremità C del raggio BC fino al concorso del raggio BA prolungato, appellasi *Tangente*, e la retta BR *Secante*.

325. Fa d'uopo distinguere la *Secante*, che adoperafi nella Trigonometria, da quella, di cui s'è ragionato nel Capitolo sesto; poichè l'una non trapassa l' centro del circolo, e l'altra sega la circonferenza in due punti.

326. Se prolunga fi l' seno AS d'un'angolo ABC, finchè seghi la circonferenza in T, la corda AT farà l' doppio del seno AS; poichè la perpendicolare BG tirata dal centro la sega per mezzo, e l' suo arco ACT farà doppio dell'arco AC: così dovrà dirsi, che l' *seno AS d'un'angolo ABC è la metà della corda AT, che sostiene un doppio arco*.

327. Quindi ne segue, 1°. ch' il seno dell'angolo ABE compimento a due retti dell'angolo ABC è lo stesso ch' il seno dell'angolo ABC; imperocchè la corda AT sostiene l'arco AET doppio dell'arco AE dell'angolo ABE, ed in conseguenza la metà AS di detta corda è l' seno dell'angolo ABE. 2°. Ch' il seno dell'angolo retto DBG è l' raggio DB; poichè, essendo questo seno prolungato, ci sosterrrebbe la semicirconferenza, ch'è il doppio dell'arco DC abbracciato dall'angolo retto.

328. Giacchè il seno dell'angolo ABD compimento a un retto dell'angolo ABC si è la perpendicolare AN ( N. 324. ), parallela ed uguale a BS; egli è per se evidente, che se dal raggio BC levafi l' seno verso SC dell'angolo ABC, il residuo BS, od AN farà il seno del compimento dell'angolo ABC.

329. Si sono calcolati i seni, le tangenti e secanti di tutt' i gradi del quarto di circolo e de' loro minuti con metodi assai semplici e facili, che trovansi al principio d'ogni Trigonometria, e di cui inutil farebbe farne quì ragionamento. Ora, siccome impossibili rendeanfi questi calcoli senza la Regola del Tre, che sovente ci dà delle frazioni, o senza l'estrazione della radice quadra, la quale non si può sempre fare con esattezza; così s'è supposto l' raggio diviso in dieci milioni di parti, a fine di poter trascurare le frazioni, od i

residui, i quali, minori essendo dell'unità, non possono equivaler giammai alla decima milionesima parte del raggio, che computar si può uguale a zero. Quindi, fatti i calcoli, si son disposti in colonne da un lato i seni, le tangenti e secanti da un grado fino a quarantacinque, aggiugnendovi i seni, le tangenti e secanti de' minuti d'ognuno di essi gradi; e dall'altro si sono parimente posti in colonne i seni, le tangenti e secanti de' compimenti dei gradi da uno fino a quarantacinque, aggiugnendovi eziandio i seni, le tangenti e secanti de' loro minuti; ciò che riesce di somma utilità, poichè sovente si ha bisogno de' compimenti.

Or convien notare, che quantunque le Misure, di cui ci serviamo per misurare un raggio, un seno, ec. sieno diverse da quelle, che si sono adoperate calcolando le Tavole de' seni, delle tangenti e secanti, ciò non ostante il lor rapporto è lo stesso. Supponiamo p. e. ch'essendo il raggio diviso in cento milioni di parti, siavi una tangente, la quale non contenga che cinquanta milioni, ed in conseguenza non sia che la metà del raggio; egli è manifesto, che dividendo 'l raggio e la tangente in piedi, o pollici, il numero de' piedi contenuti dalla tangente non sarà che la metà del numero de' piedi contenuti nel raggio. Così, quando le Tavole ci avran fatto conoscere il rapporto di due linee, dato 'l valore di una d'esse in pertiche, piedi, o pollici si troverà colla semplice regola del Tre il valore dell'altra parimente in pertiche, piedi, o pollici. Se p. e. la Tavola ci dà per la tangente cinque milioni, e ch' il raggio sia di dieci pertiche, io dirò: siccome dieci milioni valore del raggio, secondo le Tavole, è a cinque milioni valore della tangente, secondo le stesse Tavole, così 10 pertiche valore del raggio in pertiche è ad un quarto termine, che sarà in pertiche 'l valore della tangente; e questo quarto termine sarà cinque pertiche. Lo stesso dicasi negli altri casi.

330. PROPOSIZIONE LXXXVII. *In qualunque triangolo ABC (Fig. 204.) , i lati sono fra loro come i seni degli angoli opposti ad essi lati.*

Poichè l'angolo ABC è alla circonferenza, ei vale la metà dell'arco ARC, ch'abbraccia: ma il lato AC opposto all'angolo ABC sostiene l'intero arco ARC, o 'l doppio dell'arco, che misura l'angolo ABC; dunque la metà del lato AC è 'l seno dell'angolo ABC. Per la stessa ragione, la metà del lato BC è 'l seno dell'angolo opposto A, e la metà del lato AB è 'l seno dell'angolo opposto C; ora, i lati AC, AB, BC sono fra loro come le lor  
metà ;

metà; dunque essi sono come i seni degli angoli ad essi opposti.

331. PROPOSIZIONE LXXXVIII. *In qualunque triangolo scaleno ABC ( Fig. 205. ), la somma di due lati AB, BC è alla lor differenza, come la tangente della metà della somma de' due angoli BAC, BCA, formati sul terzo lato AC, è alla tangente della metà della differenza di questi stessi angoli.*

Preso per centro il vertice B, con un raggio uguale al lato BC, ch'è il maggiore de' due lati AB, BC, descrivo un circolo; dall'una e dall'altra parte prolungo fino alla circonferenza il lato minore AB, il che mi dà AD uguale alla somma  $AB + BG$  de' lati AB, BC, ed AE uguale alla differenza di detti due lati; l'angolo DBC esterno al triangolo ABC equivale alla somma de' due interni opposti BAC, BCA, e l'angolo alla circonferenza DEC, essendo la metà dell'angolo al centro DBC, vale per conseguente la metà della somma degli angoli BAC, BCA: ora, l'angolo BAC esterno al triangolo ACE vale i due interni opposti AEC, ACE; perciò la differenza dell'angolo BAC all'angolo AEC è l' minore ACE: ma nel triangolo isoscele EBC, essendo BEC uguale a BCE, la differenza di BEC a BCA è altresì l'angolo minore ACE; onde l'angolo BAC superando l'angolo AEC del minore ACE, ed AEC superando parimente l'angolo BCA dell'angolo ACE, ne segue, che la differenza degli angoli BAG, BCA è il doppio dell'angolo ACE, e però che ACE è la metà della stessa differenza.

Facendo centro in E, colla retta EC presa per raggio descrivo un'arco CN, e tiro la tangente DC, che va a terminare all'estremità della retta ED, giacchè l'angolo retto ECD abbracciar dee una semicirconferenza; poi, facendo centro in C, colla stessa retta EC presa per raggio descrivo l'arco EI, e tiro la tangente EF: così, prendendo EC per raggio, l'arco NC è la misura dell'angolo DEC, e la retta DC è la sua tangente. Parimente, l'arco EI è la misura dell'angolo ECI, e la retta EF è la sua tangente: ora parallele essendo fra loro le tangenti DC, EF, poichè son perpendicolari sopra EC, l'angolo FED è uguale al suo alterno EDC: ma FAE è uguale all'angolo DAC, che gli è opposto; i due triangoli DAC, FAE son dunque simili, ed abbiamo DA. AE: : DC. EF; cioè la somma de' lati AB, BC è alla lor differenza AE, come la tangente DC della metà della somma degli angoli BAC, BCA è alla tangente EF della metà della differenza di detti due angoli.

332. PRO-

332. PROPOSIZIONE LXXXIX. In qualunque triangolo scaleno ABC ( Fig. 206. ), il lato maggiore AC è alla somma  $AB + BC$  degli altri due, come la differenza di essi è alla differenza de' segmenti AR, RC del lato maggiore AC formati dalla perpendicolare BR tirata dall'angolo opposto.

Facendo centro in B, col raggio BC descrivo 'l circolo CDSE, e prolungo il lato AB fino alla circonferenza in D: quindi io ho  $BD = BC = BS$ ; e però  $AB - SB$ , od AS è la differenza de' lati AB, BC, e  $AB + BD$ , o AD n'è la somma: così pure, a cagione della corda EC divisa per mezzo dalla perpendicolare BR, ho  $ER = RC$ , ed in conseguenza  $AR - ER$ , od AE è la differenza de' segmenti AR, RC: ora, le secanti AG, AD ci danno AC. AD :: AS. AE ( N. 273. ); dunque il lato maggiore AC è alla somma AD degli altri due, come la lor differenza AS è alla differenza AE de' segmenti AR, RC.

*Della Risoluzione de' Triangoli Rettangoli.*

333. PROBLEMA. Data l'ipotenusa AB di 636 pertiche, e 'l lato BG di 386 trovare gli angoli ( Fig. 207. ).

Retto essendo l'angolo ACB opposto all'ipotenusa, il suo seno è uguale al raggio, e secondo le Tavole vale 10000000: ora, l'ipotenusa AB è al lato BG, come il seno dell'angolo retto ACB opposto all'ipotenusa è al seno dell'angolo CAB opposto al lato CB ( N. 330. ); io dico adunque per la Regola del Tre: 636 è a 386, come 10000000 è ad un quarto termine, che per la regola stessa trovasi 6069175; e cercando questo numero nella colonna de' seni segnata nelle Tavole trovo, ch'egli appartiene all'angolo di 37 gradi, 22 minuti: così l'angolo CAB è di 37 gradi, 22 minuti. Ora quest'angolo sommato all'angolo CBA vale un retto, o 90 gradi; dunque da 90 gradi levandone 37, più 22 minuti, il residuo 52 gradi, 38 minuti è 'l valore dell'angolo CBA.

334. AVVERTIMENTO. Per maggior brevità, dal raggio, dai seni, dalle tangenti e secanti levansi due caratteri a dritta, osservando, che se li due caratteri, i quali si tolgono, vaglion più di 50, s'aggiugne 1 all'ultimo carattere rimanente; ed eccone la ragione.

Sia il seno 3786486; supponiamo prima, ch'ei sia 3786400, mentre il suo raggio è 10000000; egli è evidente, che d'amen due le parti levando due zeri, è come se avessi diviso l'uno e l'altro



altro per 100; ed in conseguenza il rapporto del seno al raggio dopo la divisione è l' medesimo di prima. Ma se 'l seno è 3786486, e che dividasi 'l seno e 'l raggio per 100, il quoziente del seno farà 37864 con un residuo  $\frac{16}{100}$ , ch'è quasi uguale ad un'unità. Così, trascurando questo residuo, io trascuro quasi un'unità; e siccome il raggio diviso per 100 è 100000, l'unità trascurata è un cento millesimo del raggio, e quantunque questo cento millesimo sia di poco momento, ciò non ostante per maggior esattezza egli è ben fatto aggiugnere un'unità al residuo del seno, e dire: che questo seno è 37865, e non 37864: per l'opposto, se i due ultimi caratteri, che levansi dal seno, sono inferiori al cinquanta, essi vagliano in tal caso meno d'una mezza unità di raggio, ovvero la metà d'un cento millesimo; e per conseguenza si può trascurar detto valore, senza che 'l rapporto del raggio al seno sia sensibilmente alterato.

335. PROBLEMA. *Dato il lato AC di 456 pertiche, e l'angolo opposto B di 33 gradi, 48 minuti trovar l'ipotenusa AB ( Fig. 208. ).*

Dico: come il seno dell'angolo B, ch'è nelle Tavole 55630 levando due caratteri, è al seno dell'angolo retto G, ch'è 100000 levando altresì due caratteri; così 'l lato AC di 456 pertiche è ad un quarto termine, ch'è l'ipotenusa; e per la regola del Tre trovo, che quest'ipotenusa vale 820 pertiche.

336. PROBLEMA. *Dato il lato AC di 456 pertiche, e l'angolo BAC di 56 gradi, 12 minuti ritrovare il lato BC opposto a detto angolo ( Fig. 209. ).*

Facendo centro in A, con un'Intervallo uguale al lato AC descrivo l'arco CD: così, prendendo AC per raggio, il lato CB è la tangente dell'angolo A; perciò, prendendo nelle Tavole il valore 149378 della tangente dell'angolo A, dico: il raggio AC di 100000, secondo le Tavole, è alla tangente CB di 149378, secondo le stesse Tavole, come lo stesso raggio AC di 456 pertiche è ad un quarto termine, che farà 'l valore in pertiche della tangente CB; e per la regola del Tre trovo 681 pel valore di CB.

337. PROBLEMA. *Dati i lati AC, CB conoscere gli angoli ( Fig. 210. ).*

Descrivo l'arco CD, ed in conseguenza CB è la tangente dell'angolo A, ed AC n'è 'l raggio; dico adunque: come il raggio AC in pertiche è alla tangente CB parimente in pertiche, così 'l raggio AC di 100000, secondo le Tavole, è ad un quarto termine,

## DELLE MATEMATICHE. 9

mine, che farà la tangente CB espressa in parti uguali a quelle del raggio; e cercando nelle Tavole questa tangente, troverò a quale angolo essa appartiene.

**338. PROBLEMA.** *Dat' i lati AC, CB conoscere l'ipotenusa ( Fig. 211. ).*

Per lo precedente Problema cerchisi l'angolo A; poi si troverà l'ipotenusa AB, come sopra ( N. 335. ).

*Della Risoluzione de' Triangoli Obbliquantoli, o non Rettangoli.*

**339. PROBLEMA.** *Dati due angoli C, B ( Fig. 212. ) e 'l lato AB opposto all' uno de' dati angoli C ritrovare gli altri due lati.*

Cerco nelle Tavole i seni degli angoli C e B, e dico: siccome 'l seno dell'angolo C opposto al lato noto AB è al seno dell'angolo B opposto al lato ignoto AC, così 'l lato AB è al lato AC; e con la regola del Tre trovo 'l valore di AC.

Dati gli angoli C e B, il terzo è altresì noto, essendo egli 'l compimento a due retti della somma degli angoli C e B; però io dico: il seno dell'angolo C opposto al lato noto AB è al seno dell'angolo A opposto al lato ignoto BC, come 'l lato AB è al lato, che si cerca, BC, ec.

**340. PROBLEMA.** *Dato 'l lato AB ( Fig. 213. ) di 469 pertiche, il lato BC di 584, e l'angolo contenuto B di 68 gradi ritrovare gli altri angoli, e 'l lato AC.*

Per la proposizione 85 ( N. 331. ), la somma de' lati AB, BC è alla lor differenza, come la tangente della metà della somma degli angoli A, C è alla tangente della metà della loro differenza. Unisco dunque insieme i due lati 469 e 584, e la somma farà 1053; dal maggior levo 'l minore, e la differenza farà 115. Ora, essendo i tre angoli pres' insieme di 180 gradi, se quindi levo l'angolo B = 68, il residuo 112 farà la somma de' due; ne prendo la metà 56, e trovo nelle Tavole, che la tangente di 56 gradi è 148256; onde dico: la somma 1053 de' lati AB, BC è alla lor differenza 115, come la tangente 148256 della metà della somma degli angoli A, C è ad un quarto termine; e colla regola del Tre trovo 16196, ch'è la tangente di 9 gradi, 12 minuti: così io ho la tangente della metà della differenza degli angoli A, C: ora, la metà della somma delle due grandezze disuguali, più la metà

*Tomo II.*

*B*

*della*

della lor differenza, è uguale alla maggiore, e la metà della somma, meno la metà della differenza, è uguale alla minore (*Libro primo, N. 200.*) ; a 56 gradi aggiugnendone dunque 9, più 12 minuti, la somma 65 gradi, 12 minuti farà 'l valore dell'angolo A opposto al maggiore de' due lati BC, e da 56 gradi levandone 9, più 12 minuti, il residuo 46 gradi, 48 minuti farà 'l valore dell'angolo C opposto all'altro lato AB.

Ora, ritrovati in tal modo gli angoli, dico: il seno dell'angolo A è al lato CB oppostogli, come 'l seno dell'angolo B è al lato opposto AC.

341. PROBLEMA. Dato 'l lato AC ( Fig. 213. ) di 348 pertiche, il lato AB di 236, e 'l lato BC di 314 conoscere gli angoli.

Per la proposizione 86 ( N. 332. ), il lato maggiore AG è alla somma degli altri due AB, BG, come la differenza di questi è alla differenza de' segmenti AE, EG tagliati dalla perpendicolare tirata dall'angolo B sopra 'l lato maggiore AG: ora, la somma de' lati AB, BC è 550, e la lor differenza è 78. Dico dunque: il lato AC = 348 è alla somma  $AB + BC = 550$ , come la differenza 78 è ad un quarto termine; e per la Regola del Tre trovo 123 per la differenza de' segmenti AE, EC: ma la somma de' segmenti è 348; onde alla metà della differenza 123 aggiugnendo la metà di detta somma, la nuova somma 235½ farà il segmento maggiore EC, e dalla metà della somma levando la metà della differenza, il residuo 112½ farà il segmento minore.

Ciò fatto; avrò due triangoli rettangoli ABE, BEC, di cui m'è data l'ipotenusa coll'uno de' lati; così io troverò gli angoli didetti due triangoli nel modo accenato sopra ( N. 333. ).

342. AVVERTIMENTO. Null'altro io soggiugnerò, a fin di lasciare a' Principianti 'l piacere di risolvere da se stessi gli altri casi, che lor si possono presentare; ma mostreremo, che se in vece dei seni, delle tangenti, ec. e delle grandezze espresse in pertiche si pongono i loro logaritmi, molto si ristignerà il calcolo, e la difficoltà dell'operazioni. Dimostriamo ciò con un'esempio.

Sia il triangolo rettangolo ABC ( Fig. 210. ), di cui m'è noto l'angolo BAC di 56 gradi, 12 minuti, e 'l lato AC di 456 pertiche. Se voglio ritrovar l'altro lato, debbo fare questa proporzione ( N. 336. ): il raggio AC di 100000, secondo le Tavole, è alla tangente CB di 149348, secondo le stesse Tavole, come lo stesso raggio di 456 pertiche è ad un quarto termine; e  
colla

sulla regola del Tre trovo 681 pertiche pel valore di CB. Ora per far ciò, debbo moltiplicare 149348 per 456, e dividere il prodotto per 100000, il che rende l'operazioni lunghe, e tediose.

Per isfuggire dunque quest'imbroglio, cerco il logaritmo del raggio, ch'è 100000000, e quello della tangente 149378, ch'è 101742873: trovansi questi logaritmi nelle Tavole di M<sup>te</sup> Ozanam a lato de' loro seni e delle lor tangenti, ciò che riesce di gran giovamento. Cerco altresì nella Tavola de' logaritmi de' numeri, la quale trovasi subito dopo le Tavole de' seni, il logaritmo 26589648 di 456: ora, quando l'operazioni si fanno col mezzo de' logaritmi, e'convien fare con l'addizione e la sottrazione, ciò che far si dovrebbe con la moltiplicazione e divisione (*Libro primo*, N. 344.); perciò unisco insieme i due ultimi logaritmi trovati, e la lor somma si è 128332521; quindi tolgo il logaritmo 100000000, e'l residuo si è il logaritmo 28332521, che cercato nelle Tavole de' Logaritmi appartiene al numero 681; ed in conseguenza il lato B, che si cercava, è di 681 pertiche; e così negli altri casi.

*Della Longimetria.*

343. La *Longimetria* è la scienza di misurare sul terreno le lunghezze, le altezze e profondità accessibili, od inaccessibili; si pongono per ciò in uso i triangoli, e misuransi gli angoli col mezzo di un *Grafometro*, al qual'è un semicircolo, su cui son segnati tutt' i gradi, e al cui centro evvi una regola, che gira d'intorno, corredata alle sue estremità di due *Pinule*, o lastre di rame fesse nel mezzo, a fin di poter con maggior sicurezza mirare un' oggetto: quest'istrumento è sì comune, ch'inutil farebbe farne una più lunga descrizione.

344. Siccome ordinariamente misuransi le lunghezze sopra 'l terreno per poscia delinearle sulla carta, e poichè la carta è sempre più picciola del terreno, che rappresentar si vuole; così dobbiamo per necessità servirci d'una misura, la quale a proporzione sia minore di quella, che s'è adoperata per misurare; e ciò s' ottiene mediante una *Scala*, od una rettalinea, che dividesi e suddividesi proporzionalmente alle divisioni e suddivizioni della misura, di cui ci siam serviti. Se l'estensione, che si vuol rappresentare è affai grande p. e. una vasta campagna, basterà dividere una linea in molte parti uguali, che rappresentino delle pertiche, e si traf-

cureranno i piedi, i pollici e le linee, perciocchè altrimenti non potrebbero queste suddivisioni esser sensibili sulla carta: ma se ciò, che si vuol misurare, non ha molta estensione, come sarebbe un piano di una casa, d'un giardino, ec. non s'avranno in tal caso a trascurare nè i piedi, nè i pollici, ec. anzi per maggior esattezza si costruirà la scala, come insegneremo nel seguente Problema.

**345. PROBLEMA.** *Costruire una Scala, che rappresenti delle pertiche, de' piedi, de' pollici, e delle linee (Fig. 214.).*

Prendo una linea AB, ch'io divido in parti uguali, per esempio in 4, che rappresentino quattro pertiche; divido il quarto IIIB in 6 parti uguali, che rappresentino de' piedi, poichè la pertica contiene 6 piedi. Sopra AB costruisco un rettangolo ABEH, dandogli un'altezza AH ad arbitrio. Da ciascun punto di divisione della linea AB tiro delle parallele alla linea AH, e così operando, sopra la quarta pertica IIIB trovanfi sei piccioli rettangoli fra loro uguali. Dal primo di detti rettangoli tiro la diagonale IIIR, e dividendo la sua altezza IIRN in dodici parti uguali, da' punti di divisione tiro delle parallele ad AB: così, essendo il triangolo IIRNR segato da dodici basi parallele, egli è lo stesso, che se s'avessero dodici triangoli simili, i quali avessero i lor vertici al punto III, e per conseguente le lor basi proporzionali alle loro altezze: ora, l'altezze sono 1. 2. 3. 4, ec. fino a 12; onde la prima base dal lato del vertice è 1, la seconda 2, la terza 3, e così successivamente fino all'ultima NR, ch'è dodici: ma NR vale un piede, e in conseguenza dodici pollici; dunque la prima base dal lato del vertice vale un pollice, la seconda ne vale due, la terza tre, ec.

Che se voglio rappresentar delle linee, prolungo HE in S, finchè ES sia della grandezza d'un pollice, cioè della grandezza della prima base de' dodici triangoli precedenti; e dal punto S tirando la retta SB, ho un'altro triangolo ESB, il quale prolungando le parallele ad AB si troverà segato da 12 altre basi parallele; e siccome un pollice vale 12 linee, così proveremo nel sopracennato modo, che la prima delle basi dal lato del vertice B vale una linea; che la seconda ne vale due, ec.

Se costruita questa scala voglio p. e. tagliare 2 pertiche, 3 piedi, 4 pollici; sovrappongo la punta del compasso al punto I della retta AB, e l'aprio, finchè l'altra punta cada sul punto 3 segnato sopra la quarta pertica IIIB: quindi io avrò due pertiche, e tre piedi; posito 'l compasso così aperto in modo, che l'una delle sue  
punte

punte cada sul numero 4 segnato sopra la linea IIIN, e l'altra sopra qualche punto V della linea 4V; e fissando la punta in V apro il compasso, finchè l'altra punta cada in X, ed ho la grandezza VX, che vale 2 pertiche, 3 piedi, 4 pollici; e così dell'altre.

346. COROLLARIO. Quindi è facile comprendere, che col mezzo d'una Scala puossi sulla carta rappresentare qualsivoglia lunghezza ed estensione di terreno, col ridurla in triangoli, e col trasportar poscia i detti triangoli sopra la carta.

Imperocchè supponiamo, ch' i lati d' un triangolo misurato sul terreno sieno l' uno di due, il secondo di tre, e l' terzo di quattro pertiche: se sopra la mia Scala prendo tre grandezze, di cui l' una equivaglia a due parti, o pertiche di detta Scala, l' altra a 3, e la terza a 4, e che con essi tre lati io descriva un triangolo, ei sarà simile a quello del terreno; imperocchè i lati del triangolo misurato sopra l' terreno sono fra loro come i lati del triangolo delineato sulla carta, e così degli altri.

347. PROBLEMA. *Misurare una lunghezza accessibile soltanto dall' una delle sue estremità.*

Sia il muro ABCD ( Fig. 215. ) accessibile soltanto dalla banda di A; prendo sopra l' terreno due punti, di cui l' uno R sia in retta linea co' punti A, B del muro, e l' altro S sia fuori del livellamento, e molto distante da R; pongo il Grafometro in S, tal che il piano dell' istrumento sia orizzontale; traguado in R, ove metto un bastone, e quindi traguadando all' estremità del muro in M, scrivo il numero de' gradi compresi da questi due raggi visuali. Passo in R misurando la distanza SR, e ponendo il Grafometro in R (traguado in S ed M, e scrivo il numero de' gradi contenuti da' due raggi visuali. Io ho dunque un triangolo, di cui m'è data la base RS e i due angoli sopra la base; onde m'è noto ancora l'angolo al vertice, poichè egli è l' compimento de' due angoli sopra la base; e per conseguenza non si ha che dire: il seno dell'angolo B è al seno dell'angolo S, come la base RS è al lato RB; e se dato questo lato, da esso levo la distanza RA, il residuo AB sarà la lunghezza del muro, che si cercava.

Se voglio risolvere il Problema senz'aver ricorso alla Trigonometria, faccio una scala, e col suo mezzo trasporto sopra la carta la base RS; poi con un picciolo semicircolo graduato faccio in R ed S gli angoli ritrovati sul terreno, ciò che mi dà l' triangoletto *rbs* simile al triangolo RBS; da *rb* levo il valore *ra* di RA, e sulla  
mia

mia Scala portando il residuo  $ab$ , trovo 'l valore della lunghezza del muro.

Se non ho Grafometro, sul livellamento  $RS$  piglio una parte  $RZ$  di quattro, o cinque pertiche, ec. ed una parte  $SV$  uguale ad  $RZ$ : similmente sopra  $RB$  piglio  $RX = RZ$ , e sopra  $SB$  prendo  $ST = SV$ ; misuro  $XZ$  ed  $VT$ , e per conseguenza conosco i lati de' due triangoli  $ZRX$ ,  $VST$ . Sulla carta trasporto mediante la mia Scala la base  $RS$ ; sopra  $rs$  prendo le parti  $rx$  ed  $st$ , ciascuna di quattro pertiche della Scala; poi con  $rx$ , e altre due linee  $rx$ ,  $rx$ , ciascuna delle quali contiene tante pertiche della mia Scala, quante ne contengono sul terreno le rette  $RX$ ,  $ZX$ , costruisco il triangolo  $rxx$ , che si trova simile al triangolo  $RZX$ ; nello stesso modo faccio il triangolo  $ust$  simile al triangolo  $VST$ ; e prolungando i lati  $rx$ ,  $st$ , finattanto che si seghino in  $b$ , il triangolo  $rbx$  è simile al triangolo  $RBS$ , per essere gli angoli  $r$ ,  $s$  uguali ciascuno a ciascuno agli angoli  $R$ ,  $S$ : così da  $rb$  levando la retta  $ra$ , che contiene un'istesso numero di pertiche che  $RA$ , il residuo  $ab$  portato sopra la Scala ci dà 'l numero delle pertiche del muro  $AB$ .

Quest'ultimo metodo mi pare 'l più comodo, non solo perchè dispensa dal bisogno d' istrumenti; ma ancora perchè non occorre misurare gli angoli, ciò che non è sempre facile ad eseguirsi coll'ultima esattezza.

**348. AVVERTIMENTO.** Ho detto, che'l piano del Grafometro esser dee orizzontale; imperocchè, siccome quest' istrumento è alzato su un bastone al disopra del terreno, egli è evidente, che se si riguardasse al piede del muro, i raggi visuali sarebbon più lunghi delle distanze  $SB$ ,  $RB$ , e che gli angoli cangerebbero; quindi è, che se si dovesse necessariamente riguardare in  $B$ , come quando si ha per oggetto di misurare una lunghezza senz' altezza, sul livellamento del raggio visuale si sarebbon porre alcuni pelli, o bastoni, poi rimettendo l'istrumento nella sua posizione orizzontale riguarderebbesi secondo questo e secondo 'l livellamento  $RS$  per misurare l'angolo formato in  $S$ ; e lo stesso far si dovrebbe in  $R$ . Conviene a ciò riflettere, perchè altrimenti egli sarà facile prender qualche sbaglio.

**349. PROBLEMA.** Misurare una lunghezza  $AB$  affatto inaccessibile ( Fig. 216. ).

Sul terreno piglio una base  $RS$ ; da  $S$  riguardando in  $R$ ,  $A$ ,  $B$ , misuro gli angoli  $RSA$ ,  $ASB$ ; e da  $R$  riguardando in  $S$ ,  $B$ ,  $A$ , misuro gli angoli  $SRB$ ,  $BRA$ : così nel triangolo  $RAS$ , datigli  
an-

angoli sopra la base, e la base RS, conoscerò agevolmente mediante la Trigonometria i lati RA, AS, come ancora i lati RB, SB del triangolo RBS; e per conseguenza, noti essendo nel triangolo ARB i lati AR, RB non meno che l'angolo contenuto ARB, egli sarà altresì facile a conoscere la base AB (N. 340.).

Senza Trigonometria, sopra la carta trasporto la base RS, e gli angoli ARS, BRS, BSR, ASB, il che mi dà i triangoli ARS, BRS simili a quei del terreno; poi tirando la linea AB, mediante la mia scala ne conosco il valore.

Senza istrumento, sopra RS trasportato sulla carta faccio de' triangoli ARS, BRS simili a' triangoli, che son sul terreno, servendomi del terzo metodo accennato sopra (N. 347.); e trovo AB come prima.

350. PROBLEMA. *Misurare un' altezza accessibile, ed inaccessibile ( Fig. 217. )*.

Nella campagna prendo un punto R, e ponendo il Grafometro in una situazione perpendicolare all'orizzonte, tal che il suo diametro sia orizzontale, pel diametro traguado in M, e girando la regola traguado al vertice B, e misuro l'angolo BHM. Posto dunque, ch'avvicinarmi possa all'altezza AB, ho un triangolo rettangolo HMB, in cui m'è noto il lato HM e l'angolo acuto BHM, ed in conseguenza anche l'altro HBM; donde agevol fia conoscere il lato BM (N. 236.), a cui aggiugnendo l'altezza HR, od MA dell'istrumento, avrò il valore di BA.

Senza Grafometro, pianto un bastone TS fra R ed A in distanza di tre, o quattro pertiche, e traguadando orizzontalmente in M e poi in B, osservo i punti N, S, ove i raggi visuali segnano il palo TS, e misuro NS; mediante la scala porto HM sopra una carta; prendo su detta linea una parte uguale alla distanza RT od HN, e in N alzo la perpendicolare NS uguale al valore trovato sopra 'l bastone; quindi tiro HSB, che sega la perpendicolare MB in B, e portando MB sopra la scala, ritrovo 'l suo valore, a cui aggiugnendo il valore di MA, ho l'intera altezza AB.

Se 'l piede dell'altezza AB è inaccessibile, piglio un' altro punto Z, il quale sia in diritto coi punti A, R, e terminate in R le già dette operazioni, porto il Grafometro in Z, e traguadando in M e quindi in B, misuro l'angolo BTM, e la base FH: ora, essendo l'angolo FHB compimento a due retti dell'angolo BHM, egli è altresì noto; onde nel triangolo BFH, la cui base ed i cui due angoli sopra la base son dati, agevol riuscirà conoscere

re



re il lato  $BH$ ; e dato questo, insieme coll'angolo acuto  $BHM$ , si potrà conoscere ancora il lato  $BM$ , ec.

Noi possiamo servirci del sopracennato terzo metodo sì per questo, che per i precedenti casi.

351. PROBLEMA. *Tirare una linea parallela ad una linea inaccessibile  $AB$  ( Fig. 218. ).*

Cerco la lunghezza  $AB$  come sopra ( N. 349. ); e in  $R$  facendo l'angolo  $VRO$  uguale all'angolo  $RAB$ , ch'io conosco mediante il triangolo  $RAB$ , la linea  $RO$  è la parallela ricercata, mercè che gli angoli  $VRO$ ,  $RAB$  dalla medesima parte sono uguali.

Senza istrumento, sulla carta trasporto la base  $RS$ , ed i triangoli  $RAS$ ,  $RBS$ ; quindi tiro la retta  $AB$ , e da  $R$  la retta  $RO$  parallela ad  $AB$ : sopra  $RO$  ed  $RS$  prendo le parti  $RY$ ,  $RT$  fra loro uguali, e ciascuna di quattro, o cinque pertiche, e col mezzo della Scala misuro la retta  $TY$ . Sul terreno piglio la parte  $RT$  di quattro pertiche, e mettendo un bastone in  $R$  ed un'altro in  $T$ , a cui attacco delle cordicelle, faccio la cordicella  $RY$  di quattro pertiche, e la cordicella  $TY$  uguale al numero delle pertiche trovate pel valore di  $TY$ ; tendo le due cordicelle, finchè le loro estremità si tocchino in  $Y$ , e'l triangolo  $RYT$  è simile al triangolo  $RYT$  sopra la carta: così, parallela essendo  $RY$  ad  $AB$ , la stessa  $RY$  sul terreno sarà altresì parallela ad  $AB$ .

352. PROBLEMA. *Levare il piano d'una gran Campagna ( Fig. 219. ).*

Prendo una base  $AB$ , da cui osservo molti punti, come  $C$ ,  $D$ ,  $E$ ,  $H$ , ec. in cui dove traguado per l'estremità  $A$ ,  $B$  della base: così egli m'è facile conoscere le distanze  $CD$ ,  $DE$ ,  $HG$ ,  $GF$  di tutti i punti, che sono a dritta o a sinistra della base, e le loro distanze all'estremità della stessa; e quid'io avrò le posizioni di tutti questi punti.

Quanto al punto  $L$ , ch'è in diritto colla base  $AB$ , piglio un'altra base  $AM$ , e dalle sue estremità  $A$ ,  $M$  traguado ne' punti  $C$ ,  $L$ ; ed in conseguenza io conoscerò come sopra le rette  $LC$ ,  $LM$ , ec. il che mi darà la posizione del punto  $L$ ; e lo stesso farei, se dal lato di  $B$  si ritrovasse un punto, che fosse in retta linea con  $AB$ ; ciò è così chiaro, che basta indicarne le tracce.

353. PROBLEMA. *Levare il piano d'un luogo chiuso, in cui non sia possibile entrarvi ( Fig. 220. ).*

Misuro il lato  $AB$ , e prolungandolo poscia in  $R$ , misuro l'angolo esteriore  $RBC$  e'l lato  $BC$ ; ciò che mi dà la posizione de'  
due

## DELLE MATEMATICHE. 17

due lati AB, BC. Prolungo BC in S, e misuro l'angolo SCD e'l lato CD; il che mi dà la posizione CD; e termino il rimanente nello stesso modo.

Siccome il muro BC potrebbe impedire, che si prendesse l'angolo RBC col Grafometro, così è necessario sul prolungamento BRN prendere un punto R, da cui si tirerà una retta RH parallela a BG, e si misurerà l'angolo NRH uguale all'angolo RBC; e così in altri casi simili.

Senza istrumento, sopra'l prolungamento BR e'l lato BC prendo le parti BP, BM del valore di quattro, o cinque pertiche in circa; misuro la retta MP, e'l tutto trasportando sopra la carta, col mezzo della scala ho la posizione de' due lati AB, BG; e lo stesso s'operi ancora rispetto agli altri due.

354. PROBLEMA. *Levare il piano d'un luogo, fuori del quale non sia possibile uscire, e nel cui mezzo non si possa penetrare* (Fig. 221.).

Misuro i lati EA, AB e l'angolo contenuto A, e'l tutto trasportando sulla carta, ho la posizione de' due lati EA, AB; e così degli altri.

### Del Livellamento.

355. Una retta linea dicesi a *Livello*, quando tutt' i suoi punti son equidistanti dal centro della terra; e siccome la figura della Terra molto s'accosta alla Sferica, così ne segue, ch' una linea a livello è una circolare.

356. Se sulla superficie della terra piantasi a piombo un bastone AO (Fig. 222.), alla cui estremità mettasi un cannocchiale, od una regola 1, 5, che li sia perpendicolare, e che veggasi a traverso il cannocchiale, o per le sue pinule poste all'estremità della regola, un' oggetto distante D, il raggio visuale AD farà tangente della linea a livello AC, e tanto più s'allontanerà, quanto sarà più lungo; tuttavolta siccome questa linea AD ci pare orizzontale, così dicesi linea a *Livello apparente*, e prendesi ancora per la linea a vero livello AB, quando la sua lunghezza AD non eccede 100, o 110 pertiche; poichè grandissima essendo la superficie della terra rispetto a 100, o 110 pertiche, l'innalzamento BD del punto D del livello apparente sopra B è insensibile: ma quando AD diventa più lunga, la differenza BD comincerà a farsi sensibile; e però ella dee necessariamente correggere, come mostreremo in progresso.

Tomo II.

C

357. II

357. Il livello, che comunemente s'adopra, quando trattasi d'una distanza di 100, o 110 pertiche, si è'l *livello d'acqua*; egli è composto d'una canna di ferro bianco ABCD (Fig. 223.) incurvata alle sue estremità, a ciascuna di cui ponesi una picciola canna di vetro. Nel mezzo O evvi un'altra canna di ferro bianco, che l'è perpendicolare, ed in cui s'incastra un bastone, che piantasi a piombo sul terreno. Se vogliamo adoprar quest'istrumento, c'riempiesi d'acqua, e allora la superficie d'acqua RS, che apparisce a traverso la canna di vetro posta in A, mettesi a livello colla superficie d'acqua TX, che apparisce in D: l'esperienza c'insegna, ch'i liquidi, i quali agiscono liberamente, si mettono sempre a livello; così, se da R si truova in X, il raggio visuale R avrà i suoi termini R, X a livello, e se truovasse in Z, la linea RZ sarà una linea a livello apparente.

358. Gli altri livelli, di cui possiamo servirci per le distanze, che son maggiori di 100, o 110 pertiche, in questo solo differiscono; ch'a fine di vedere gli oggetti più distintamente in vece d'acqua s'adopra de'vetri di cannocchiale: se ne trovano le descrizioni nel Trattato di Livellamento di M<sup>r</sup>. Picard dato alla luce da M<sup>r</sup>. de la Hire, e'n quello di M<sup>r</sup>. Bulles.

359. Il Livellamento dicesi semplice, quando può farsi con un sol colpo di livello; e composto, quando per giugnere al desiderato fine son necessarij più colpi.

360. PROBLEMA. Dati sul terreno due punti A, B (Fig. 224.) ritrovare, se sieno a livello, o quale dei due sia più distante dal centro della terra, e di quanto.

Supponiamo, che la distanza AB non ecceda le 100, o 110 pertiche: pongo il livello in A, e mando in B un'uomo, a cui do una doppia pertica, ch'egli dee porre a piombo in B, ed un cartone, sul quale vi sia una gran linea tinta di nero; e li comando, che faccia scorrer questo cartone lungo la doppia pertica, in modo che detta linea sia sempre perpendicolare alla pertica. Truovato per le superficie R, S dell'acqua, e quando m'accorgo, che la linea nera del cartone passa per l'estremità T del raggio visuale RST, faccio segno all'uomo, che m'ajuta, di fermarsi, acciò misuri l'altezza TB, ed io nel tempo stesso misuro l'altezza VA del raggio visuale: ordino allo stesso di ritornare; e se l'altezza TB da esso ritrovata equivale alla mia AV, i due punti A, B sono a livello; imperocchè equidistanti essendo dal centro della terra i due punti V, T, se da queste due distanze uguali levo le parti

parti uguali VA, TB, i punti A, B saranno altresì equidistanti dallo stesso centro: che se l'altezza TB è minore dell'altezza VA, da VA levo TB, e'l residuo HA fa conoscere, ch'il punto A è più vicino al centro della terra di quello sia 'l punto B dalla quantità HA; e quindi scorgefi agevolmente cosa far si dovrebbe, se TB fosse maggiore di VA.

Se la distanza AB ( Fig. 225. ) eccede le 100, ma non le 200 pertiche, divido questa distanza in due parti uguali AC, CB, e ponendo il livello in C, da R traguado pel punto S al punto T; traguado poscia da S per H, e se ritrovo uguali le due altezze AH, BT, i punti A, B saranno a livello: ma se l'una è maggior dell'altra, dalla maggiore levo la minore, e'l residuo mi fa conoscere, quanto l'uno de' punti sia più elevato dell'altro, e quanto sia più distante dal centro della terra.

Che se la distanza AM eccede le 200 pertiche, la divido in parti uguali, ciascuna di cui non superi le 100, per esempio in tre AC, CB, BM; poi mettendo il livello in C, livello i due punti A, B; e quindi ponendo il livello in B, innalzo i due punti B, M; e così in altri casi.

361. AVVERTIMENTO. Questo metodo è assai buono per omettere il calcolo, che far necessariamente conviene, quando trattasi di corregger l'errore de' colpi di livello troppo estesi; ma siccome egli ci obbliga a moltiplicare le operazioni, mostreremo in qual maniera si facciano correzioni, di cui abbiamo già parlato.

362. PROBLEMA. Corregger gli errori di Livello apparente. Supponiamo, ch' il circolo ADI ( Fig. 226. ) rappresenti la superficie della terra, e che la distanza AD dei due punti A, D da livellarfi sia di 500 pertiche; il livello apparente AB farà la tangente, e la retta BOI tirata dal centro farà la secante; così noi avremo  $BD : BA :: BA : BI$  ( N. 271. ) : ora, picciolissima essendo la parte DB della secante rispetto 'l diametro DT della terra, non si può trascurarla; ed in conseguenza DB.

$BA :: BA : DI$ ; dal che io deduco  $DB \times DI = \overline{BA}$ , e  $DB = \frac{\overline{BA}}{DI}$ , cioè se dividiamo 'l quadrato della distanza AB pel diametro della terra, il quoziente farà l'innalzamento del livello apparente al di sopra del vero.

Ora, secondo M<sup>r</sup>. Picard e M<sup>r</sup>. de la Hire, il diametro della Terra è di 653894 pertiche; onde, facendo il quadrato 250000 della

della distanza BA = 500 pertiche e dividendolo per 653894, ritrovo 2 pollici, 9 linee per l'innalzamento BD: così, dopo aver livellato col metodo ordinario, debbo sottrarre 2 pollici, 9 linee dall'altezza, ch'io trovo dalla banda di B, quando traguardo da A in B.

363. AVVERTIMENTO. Quantunque questo metodo non paja, egli è tuttavolta esattissimo; imperocchè, se al quadrato di AB s'aggiugne quello di AO, questi due quadrati presi insieme saranno uguali al quadrato dell'ipotenusa BO; ed estraendo la radice quadra, s'avrà l' valore di BO, da cui levando DO = AO, troveremo in effetto, che l' valore di BD è 2 pollici, 9 linee, come sopra.

364. COROLLARIO. Gl'innalzamenti BD, EH, ec. di differenti punti B, E del livello apparente sono come i quadrati delle lor distanze AB, AE, ec. al punto A, in cui si fa 'l livellamento.

Noi abbiamo  $BD = \frac{AB^2}{DI}$  ( N. 362. ), e per la stessa ragione

$EH = \frac{AE^2}{DI}$ ; e però  $BD : EH :: \frac{AB^2}{DI} : \frac{AE^2}{DI}$ : Ora, divisi essendo gli ultimi due termini dalla stessa grandezza DI, sono tra loro, come se non fossero stati divisi; dunque  $BD : EH :: AB^2 : AE^2$ .

365. COROLLARIO II. Dato dunque l'innalzamento BD d'un punto B di livello apparente, egli è altresì facile conoscere gl'innalzamenti di tutti gli altri punti E, ec. di quel livello, di cui son date le distanze AE, ec.

Poichè basta dire per la Regola del Tre: siccome il quadrato di AB è al quadro di AE, così l' dato innalzamento BD è ad un quarto termine, che farà l'innalzamento cercato EH; e lo stesso si dica in altri casi.

M<sup>r</sup>. Picard ha in questo modo calcolato gl'innalzamenti de' punti di livello apparente al di sopra del vero dalla distanza delle 50, fino a quella delle 4000 pertiche.

# DELLE MATEMATICHE. 21

Tavola degl'Innalzamenti del Livello apparente.

Distanze.	Innalzamenti.		Distanze.	Innalzamenti.
Pertiche.	Piedi. Pollici. Linee.		Pertiche.	Piedi. Pollici. Linee.
50	0....0.... $\frac{1}{2}$		750	0....6... 3
100	0....0.... $1\frac{1}{2}$		800	0....7... 1
150	0....0....3		850	0....7... $11\frac{1}{2}$
200	0....0.... $5\frac{1}{2}$		900	0....8....11
250	0....0.... $8\frac{1}{2}$		950	0...10... 0
300	0....1....0		1000	0...11....0
350	0....1.... $4\frac{1}{2}$		1250	1....5.... $2\frac{1}{2}$
400	0....1.... $9\frac{1}{2}$		1500	2....0....9
450	0....2....3		1750	2....9.... $8\frac{1}{2}$
500	0....2....9		2000	3....8....0
550	0....3....6		2500	5....8....9
600	0....4....0		3000	8....3....0
650	0....4....8		3500	11....2....9
700	0....5....4		4000	14....8....0

366. PROBLEMA. Livellare due termini, di cui non sia data la distanza.

Metto il livello in A ( Fig. 227. ), e traguardo in B; tra-  
porto poscia 'l livello in B, e traguardo in A. Misuro l' altezza  
CA, SB; d' amendue le parti levo l' altezza AR, o BT dell' instru-  
mento, e se uguali sono i residui CR, ST, dico; ch' i punti A,  
B sono a livello, mercè che l' innalzamento del livello apparen-  
te, quando da A traguardo in B, è lo stesso dell' innalzamento, quan-  
do da B traguardo in A; onde i punti C, S esser debbono ugual-  
mente lontani dal centro della terra; ed in conseguenza, a motivo  
di CA = SB, debbono altresì esser equidistanti i punti A, B.

Se disuguali sono i residui ST, CR ( Fig. 228. ), dal maggio-  
re ST levo il minor CR, e la metà del residuo denota di quan-  
to 'l punto A eccede 'l livello del punto B; imperocchè supponia-  
mo, che A si trovasse in un punto F, il quale fosse a livello col  
punto

punto B; il livello, in vece d'esser' in R, sarebbe in X, e le altezze LT, CX farebbono uguali: ora, venendo ad innalzarsi il punto A, s'innalza parimente il livello da X in R, il che fa accrescere l'altezza LT della quantità LS; e dall'altro lato, l'altezza CX diminuisce d'una quantità uguale ad LS: così  $CR = LT - LS$ ; dall'altezza ST levando dunque l'altezza CR, o  $LT - LS$ , il residuo  $ST - LT + LS$  equivale a  $2LS$ , o a due volte l'altezza SL, od AF del punto A al di sopra del punto F; onde la metà di questo residuo si è l'altezza AF.

Nè dicasi, che l'altezza AF, od RX non equivale all'altezza SL, perchè parallele non sono le linee RF, SB, andando esse a terminare al centro della terra; imperocchè grandissima essendo la distanza de' punti F, B al centro della terra rispetto alle linee RF, SB e alla loro distanza FB, ch'è altresì picciolissima rispetto alla circonferenza della terra, le due linee FR SB possono passar per parallele; la qual cosa rende le parti RX, SL sensibilmente uguali.

Finalmente, se da una parte ritrovo l'altezza SB (Fig. 229.) maggiore dell'altezza BT, e dall'altra l'altezza AX minore dell'altezza AR dello stesso livello; al difetto RX aggiugno l'eccesso ST, e la metà della somma si è l'altezza del punto A al di sopra del livello del punto B; poichè supponiamo, ch' il punto A s'abbassi in F, ove sia a livello con B; il livello, in vece d'essere in R, discenderà in V, ed uguali faranno l'altezze HT, XV. Ora, ascendendo 'l livello in R, l'altezza HT accresce d'una parte SH uguale ad AF; e 'l punto X, in vece d'essere al di sopra del livello, come lo era prima, trovasi al di sotto, tal che la parte XV, di cui eccedeva 'l livello, aggiunta alla parte RX, di cui n'è superato, sono insieme uguali ad SH; dunque  $RX = SH - HT$ , e per conseguenza, aggiugnendo ST od  $SH + HT$  ad RX, o  $SH - HT$ , la somma  $2SH$  è 'l doppio di SH, o dell'altezza AF del punto A al di sopra del punto B.

Quest'è un metodo eccellente per livellare certi termini, di cui troppo imbarazzante riuscirebbe trovar la distanza.

367. PROBLEMA. Livellare due termini A, R (Fig. 230), fra cui trovansi e altezze, e discese.

Do più colpi di livello ascendendo da A in S, poi discendendo da S in X; quindi da X ascendendo in Z, e finalmente di nuovo da Z discendendo in R faccio una colonna di tutte le altezze ritrovate ascendendo da A in S e da X in Z, ed un'altra dell'altezze ritrovate discendendo da S in X, e da Z in R; facendo dap-  
poi

poi le somme di ciascuna d'esse dalla maggior levo la minore ,  
e'l residuo denota l'altezza del punto A al di sopra del punto R ;  
ciò che non ha bisogno di dimostrazione.

CAPITOLO NONO.

*Della Planimetria, o Misura delle Superficie piane, e del lor  
rapporto fra esse.*

368. NOI chiameremo *Elementi* d'una superficie piana le linee  
infinitamente prossime, di cui si concepisce esser que-  
sta composta ; qualunque linea CR ( *Fig. 231.* ) , che taglierà  
perpendicolarmente ciascun' Elemento , sarà la retta , ch' elprime-  
rà la loro moltitudine, o la somma delle lor grossezze, o la tota-  
le grossezza loro.

369. PROPOSIZIONE LXXXIX. I parallelogrammi ABCD,  
EBCF ( *Fig. 232.* ) , che hanno la stessa base BC, e che sono in-  
fra due parallele AF, BH, sono tra loro uguali.

A cagione de' parallelogrammi, abbiamo  $AB = DC$ ,  $BE = CF$ ,  
e  $AD = EF$  ; a questi due ultimi aggiugnendo dunque la parte  
DE avremo  $AE = DF$  ; onde, poichè i due triangoli AEB,  
DCF hanno i tre lati uguali ciascuno a ciascuno ( *N. 100.* ) , d'  
amendue le parti levo il triangoletto DOE, ed ho  $ADOB = OEFC$  ;  
e all'una e all'altra parte aggiugnendo il triangoletto BOC tro-  
vo  $ABCD = EBCF$  ; dunque ec.

370 COROLLARIO I.º I parallelogrammi ABCD, EMHF,  
che sono fra due parallele AF, BH, e che hanno le basi uguali  
BC, HM, sono uguali.

Tiro le rette BE, CF ; alle due rette uguali AD, EF aggiu-  
gno la parte comune DE, ed ho  $AE = DF$  e  $AB = DC$  ;  
ora, l'angolo EAB = FDC ; dunque i triangoli EAB, FDC,  
avendo i lati EA, AB uguali ciascuno a ciascuno a' lati ED,  
DC, e l'angolo compreso uguale all'angolo compreso, son perfet-  
tamente uguali, e l'angolo AEB equivale all'angolo DFC : così,  
essendo le rette BE, CF uguali ed ugualmente inclinate fra le  
parallele AF, BH, sono tra lor parallele, ed in conseguenza  
EBCF è un parallelogrammo : ora  $EBCF = ABCD$  ( *N. 369.* ) ,  
e per la stessa ragione  $EBCF = EMHF$  ; dunque  $ABCD = EMHF$ .

371. COROLLARIO II. Qualsivoglia parallelogrammo EBCF  
è uguale



è uguale al prodotto della sua base  $BC$  moltiplicata per la sua altezza, o per la perpendicolare  $ER$  tirata dal vertice sopra la base.

Supponiamo, che'l parallelogrammo  $ABCD$  sia rettangolo; il prodotto della base  $BC$  moltiplicata per l'altezza  $AB$  sarà 'l valore di questo rettangolo: ora, il parallelogrammo  $EBCF$  equivale al rettangolo; onde il parallelogrammo  $EBCF$  è altresì 'l prodotto della base  $BC$  per  $ER$ , o per la sua uguale  $AB$ .

372. COROLLARIO III. I parallelogrammi  $BEFC$ ,  $MEFH$ , che han le basi e l'altezze uguali, son' uguali.

Ciascuno d'essi è uguale ad un rettangolo  $BADC$ , ch' abbia la stessa base ed altezza di loro, o che avenlo la base uguale alla base sia fra le medesime parallele; dunque ec.

373. COROLLARIO IV. I parallelogrammi, che hanno le basi disuguali e l'altezze uguali, sono fra lor come le basi; quei, che hanno l'altezze disuguali e le basi uguali, sono fra loro come le lor' altezze, e quei, che hanno l'altezze reciproche alle lor basi, sono uguali fra loro.

Supponiamo, che la base  $BC$  del parallelogrammo  $BADC$  sia maggiore della base  $MH$  del parallelogrammo  $EMHF$ , e che uguali sieno l'altezze  $AB$ ,  $ER$ ; il parallelogrammo  $BADC$  farà dunque il prodotto della sua base  $BC$  per la sua altezza  $BA$ , e'l parallelogrammo  $MEFH$  farà altresì 'l prodotto della base  $MH$  per l'altezza  $ER$ , o per la sua uguale  $BA$ : ma egli ci è noto, che se due grandezze disuguali  $BC$ ,  $MH$  son moltiplicate per una medesima grandezza  $BA$ , i prodotti sono fra lor come le grandezze disuguali  $BC$ ,  $MH$ ; però i due parallelogrammi sono fra loro come le lor basi disuguali  $BC$ ,  $MH$ .

Se supponiamo, che uguali sieno le basi  $BC$ ,  $MH$ , e disuguali le loro altezze  $BA$ ,  $ER$ , si mostrerà nello stesso modo, ch' i due parallelogrammi sono fra essi come le lor' altezze.

Finalmente, se l'altezze son reciproche alle basi, mostreremo come sopra (N. 184.), che i parallelogrammi sono uguali.

374. COROLLARIO V. I triangoli  $ABC$ ,  $AEC$  (Fig. 233.), che hanno la stessa base e che sono fra due parallele, son' uguali.

Tiro  $CR$  parallela ad  $AB$ , e  $CH$  parallela ad  $AE$ , il che cidà i due parallelogrammi uguali  $ABRC$ ,  $AHC$  (N. 369.): ma essendo  $BC$ , la diagonale del parallelogrammo  $ABRC$ , il triangolo  $ABC$  n'è la metà; e per questa stessa ragione il triangolo  $AEC$  è la metà del parallelogrammo  $AHC$ ; questi due triangoli son dunque uguali, perocchè le metà sono fra loro come il lor tutto.

375. CO.

375. COROLLARIO VI. Qualsvoglia triangolo è uguale al prodotto della sua base moltiplicato per la metà della sua altezza.

Poichè, qualunque triangolo è la metà d'un parallelogrammo d'ugual base ed altezza: ma, il parallelogrammo è l' prodotto della sua base per la sua altezza; onde il triangolo è l' prodotto della base per la metà della sua altezza.

376. COROLLARIO VII. Dunque 1°. I triangoli, che hanno basi uguali, e che sono fra l' istesse parallele, o che hanno altezze uguali, sono uguali. 2°. Quei, che han basi disuguali ed altezze uguali, sono fra loro come le lor basi. 3°. Quei, che hanno altezze disuguali, sono tra loro come le loro altezze. 4°. Quei, che hanno l' altezze reciproche alle basi, sono uguali.

Ciò chiaro apparisce, a motivo ch' i triangoli sono metà de' parallelogrammi, che hanno ugual base ed altezza de' medesimi.

377. COROLLARIO VIII. Qualsvoglia poligono regolare EFGH ( Fig. 234. ) è uguale ad un triangolo ABC, la cui base BC equivale al circuito del poligono, e l' altezza AB al cateto, od apotema OR.

Supponiamo, ch' il poligono sia un pentagono; dal centro O tiro de' raggi a tutti gli angoli, ciò che lo divide in cinque triangoli d'ugual base ed altezza: ora, il triangolo OHG è uguale alla sua base HG moltiplicata per la metà della sua altezza OR ( N. 375. ); onde il pentagono equivale a 5HG moltiplicato per  $\frac{1}{2}$ OR: ma il triangolo ABC è uguale a BG moltiplicato per  $\frac{1}{2}$ AB ( N. 375. ), e per ipotesi abbiamo  $BG = 5HG$ , ed  $AB = OR$ ; il triangolo ABC è dunque uguale al poligono.

378. COROLLARIO IX. Qualsvoglia circolo è uguale ad un triangolo, che abbia per base una linea uguale alla circonferenza, e per altezza una linea uguale al raggio.

Il circolo è un poligono d' infiniti lati, il cui perimetro è la circonferenza, e l' cui apotema non differisce dal raggio, poichè i lati sono infinitamente prossimi alla circonferenza. Dunque ec.

Ovvero in altro modo: Sia'l circolo BQM ( Fig. 235. ), il cui raggio è OB; concepisco, che dal medesimo centro O, e da tutt' i punti infinitamente prossimi al raggio descritte sieno delle circonferenze CRS, DHN, ec. che faranno gli elementi del circolo, talmente che la lor somma non differirà dal circolo stesso.

Da B alzo la perpendicolare BA, ch' io concepisco uguale alla circonferenza BQM. Dal punto A tiro al centro la retta AO, e da tutt' i punti di divisione concepisco delle rette CF, DG pa-

parallele alla retta BA, e che vadano a terminare sopra AO; simili essendo i circoli BQM, CRS (N. 287.), abbiamo BQM, CRS :: OB, OC, e a cagione de' triangoli simili OBA, OCF, abbiamo altresì BA. CF :: OB. OC; dunque BQM. CRS :: BA. CF: ma per ipotesi BQM = BA; onde CRS = CF; e si proverà eziandio, che la circonferenza DHN equivale alla retta DG; donde ne segue, che tutti gli elementi DG, CF, BA del triangolo OBA sono uguali ciascuno a ciascuno a tutti gli elementi del circolo BQM, e ch' in conseguenza questo circolo è uguale al triangolo OBA, il quale ha per base la retta BA uguale alla circonferenza, e per altezza il raggio OB.

379. COROLLARIO. *Dunque tutt' i circoli di differenti raggi, quali sono BQM, CRS, DHN, ec. si possan cangiare in triangoli simili OBA, OCF, ODG, ec.*

380. COROLLARIO XI. *Qualsivoglia corona, cioè qualsivoglia spazio compreso fra due circonferenze BQM, CRS concentriche e disuguali, è uguale ad un trapezoide BCFA, i cui lati paralleli e disuguali BA, CF sono uguali ciascuno a ciascuno alle due circonferenze, e di cui l' altezza CB è la differenza de' raggi OB, OC.*

Altro non è la corona che 'l circolo BQM, meno il circolo CRS: ora, il circolo BQM equivale al triangolo OBA, e 'l circolo CRS al triangolo OCF; la corona è dunque uguale al triangolo OBA, meno il triangolo OCF, cioè al trapezoide BCFA.

381. AVVERTIMENTO. Da tutto ciò ch'abbiam detto sembra risultarne, che trovar si possa la quadratura del circolo, cioè una figura rettilinea eguale al circolo: ma la difficoltà consiste nel rinvenire una retta eguale alla circonferenza; ed egli è appunto ciò, a cui non v'è apparenza, che giugner si possa.

Siccome i lati de' poligoni iscritti e circonscritti al circolo tanto più s'avvicinano alla circonferenza, quanto è maggiore il lor numero; egli è evidente, che a forza d'iscrivere e circonscrivere poligoni simili, se ne troverebber' alla fine due, i cui lati confonderebbonfi colla circonferenza, ma perchè si dovrebbero a quest' oggetto fare infiniti calcoli, ciò che non è possibile, Archimede non ha avanzato il suo che fino a' poligoni iscritto e circonscritto di 96 lati, ed ha ritrovato, che 'l diametro era al circuito del poligono circonscritto, come 1 a  $3\frac{1}{2}$ , o come 7 a 22, e che lo stesso diametro era al circuito del poligono iscritto, come 1 a  $3\frac{1}{4}$ , o come 7 a 21 $\frac{1}{4}$ ; di modo che riducendo 'l diametro 7, e i due circuiti 22 e 21 $\frac{1}{4}$  al medesimo denominatore 71, il che ci dà  $\frac{49}{71}$  pel di-

metro,

metro, e  $\frac{1162}{71}$ ,  $\frac{1161}{71}$  per i due circuiti, la differenza de' due circuiti è uno, cioè una parte del diametro diviso in 497 parti, o  $\frac{1}{497}$  del diametro. Ora, siccome la circonferenza del circolo molto più s'avvicina al circuito del poligono circoscritto ch'a quello dell'inscritto, egli è manifesto, che la differenza della circonferenza del circolo al circuito del poligono circoscritto esser dee minore della metà della  $497^a$ . a parte del diametro, cioè minore della  $494^a$ . parte del diametro; e perciò stimiam bene servirci piuttosto del rapporto di 7 a 227 per esprimere il rapporto del diametro del circolo alla sua circonferenza, di quello sia del rapporto di 7 a  $21\frac{70}{11}$ ; tuttavia, quantunque giustissimo sia in pratica il rapporto di 7 a 22, i Geometri, i quali si vantano di somma esattezza, adopran per ordinario de' numeri maggiori a fine di diminuire la differenza: ma l' più comodo a mio giudizio si è l' rapporto di 1000 a 3141, perchè nelle Regole del Tre, che convien fare, il numero 1000 risparmia talvolta una moltiplicazione, e talora una divisione.

382. PROBLEMA. *Trovare l' area d' un circolo, di cui sia dato il raggio OB ( Fig. 235. )*.

Sia l' raggio OB di 3 pertiche; il diametro ne conterrà 6: così per la Regola del Tre io dico: 1000 è a 3141, come 6 è ad un quarto termine, il qual farà la circonferenza, che moltiplicata per la metà del raggio darà l'area del triangolo OBA uguale alla superficie del circolo.

383. COROLLARIO I°. Se data la circonferenza del circolo si cercasse l' raggio, per quindi ritrovare la superficie del circolo, mediante la Regola del Tre si direbbe: 3141 è a 1000, come la data circonferenza è ad un quarto termine, che sarebbe l' diametro della stessa; e conseguentemente la metà di questo diametro sarebbe il raggio cercato.

384. COROLLARIO II. *Qualunque settore ABC ( Fig. 236. ) è uguale al prodotto del suo arco AC moltiplicato per la metà del raggio AB.*

Essendo il circolo ARC un poligono regolare d' infiniti lati, egli è composto d' una infinità di triangoli, ciascuno de' quali ha per altezza il raggio, e di cui la somma delle basi equivale alla circonferenza; per la medesima ragione il settore ABC è composto d' un' infinità di triangoletti, i quali hanno parimente per altezza il raggio AB, e la cui somma delle basi è uguale all' arco RC: ma la somma de' triangoli, che compongono il circolo, equivale alla somma totale delle basi, o alla circonferenza moltiplicata

per la metà del raggio; onde la somma de' triangoli, che compongono il settore, è uguale alla somma totale delle basi, cioè all'arco AC moltiplicato per la metà del raggio.

385. COROLLARIO III. *L'area d'un segmento ASC è uguale al settore ABCS, meno il triangolo ABC.* Il ch'è per se manifesto.

286. PROBLEMA. *Misurare un Trapezoide ABCD (Fig. 237.)*  
Unisco insieme le due basi AD, BC, e moltiplicando la loro somma per la metà dell'altezza, o della perpendicolare AB, tirata fra le due basi, il prodotto si è il valore del trapezoide; il che io dimostro nel seguente modo.

Divido per mezzo in O l'uno de' lati non paralleli DC, e dal punto A tiro per O la retta AR, che sega BC prolungata in R.

Poichè i triangoli ADO, OCR hanno l'angolo AOD uguale all'angolo COR, che gli è opposto al vertice, l'angolo ADO uguale al suo alterno OCR, e'l lato DO uguale al lato OC, sono perfettamente uguali (N. 100.), e'l lato AD equivale al lato CR; ad amendue le parti aggiugnendo dunque la parte comune AOCB, avremo il trapezoide ADCB uguale al triangolo ABR: ma il triangolo ABR è uguale al prodotto della sua base BR, o  $BC + AD$  moltiplicata per  $\frac{1}{2}AB$  (N. 375.); onde il trapezoide è uguale allo stesso prodotto.

Ovvero divido per mezzo in R, S (Fig. 238.) ciascuno de' lati non paralleli AB, DC, e tirando la retta RS, che sarà parallela da AD, o BC, la moltiplico per l'altezza AB, il che ci dà il valore del trapezoide; ed ecco come lo provo.

Dal punto S tiro FE perpendicolare a BC, e che concorra in AD prolungato in E; perocchè i triangoli DSE, CSF hanno l'angolo DSE uguale all'angolo CSF, che gli è opposto al vertice, l'angolo EDS uguale al suo alterno FCS, e'l lato DS uguale al lato SC, sono perfettamente uguali. Onde, a ciascunodi essi aggiugnendo la parte comune ADSF, avremo il rettangolo AEBF uguale al trapezoide ABCD: ma il rettangolo equivale al prodotto di BF, od RS per l'altezza AB; dunque il trapezoide è uguale allo stesso prodotto.

387. PROBLEMA. *Misurare una fascia a rigiri ABCDEFG (Fig. 239.)*

Sego per mezzo ciascuna delle rette AH, BH, CF, DE, e da' punti di divisione tiro la linea ORST, la quale moltiplicata per la larghezza AH della fascia ce ne dà la superficie; poichè il trapezoide ABGH equivale al prodotto di OR moltiplicato per AH (N. 386.),

( N. 386. ) , il trapezoide BCFG è uguale ad  $RS \times AH$  , e'l trapezoide CDEF equivale ad  $ST \times AH$  : ma questi trapezoidi compongono la fascia ; ond' essa equivale ad  $OR \times AH + RS \times AH + RS \times AH + ST \times AH$  , od  $ORST \times AH$  .

388. COROLLARIO. Uguale essendo una corona ABCDEFGN ( Fig. 340. ) al trapezoide EART , le cui basi parallele AR , ET sono uguali ciascuna a ciascuna alle due circonferenze , e la cui altezza si è la differenza AE de' due raggi ; egli è evidente , che se dal centro O , e dal punto H , che divide per mezzo AE , descrivesi una circonferenza , la corona sarà uguale a detta circonferenza moltiplicata per AE ; imperocchè essa circonferenza sarà uguale alla retta HS , che sega per mezzo i lati non paralleli AE , RT del trapezoide , ec.

389. PROBLEMA . *Misurare una figura irregolare ABDEG* ( Fig. 241. ) .

Dall'uno degli angoli C tiro delle rette agli angoli opposti , il che divide la figura in triangoli ; misuro ciascuno di essi , e la lor somma ci dà 'l valore della figura .

390. PROPOSIZIONE XC. *I Rettangoli , i Parallelogrammi ed i Triangoli sono in ragion composta della ragione delle loro altezze , e di quella delle lor basi .*

Sieno , come nella Figura 242 , due rettangoli , di cui l' altezza dell'uno sia  $a$  , la base  $b$  , l' altezza dell' altro  $c$  , e la base  $d$  : paragono l' altezza del primo a quella del secondo , e la base alla base , il che mi dà le due Ragioni  $a , c ; b , d$  : faccio la ragione composta di queste due , ed ho  $ab , cd$  . Ora il primo termine  $ab$  di questa ragione , essendo 'l prodotto dell' altezza del primo rettangolo per la sua base , è uguale a detto rettangolo ; e per la stessa ragione il secondo termine  $cd$  è uguale al secondo : i due rettangoli sono dunque in ragion composta della ragione delle loro altezze , e di quella delle lor basi .

Uguali essendo i parallelogrammi a' rettangoli d' ugual base ed altezza , sono parimente in ragion composta della ragione delle loro altezze , e di quella delle lor basi . Lo stesso dicasi de' triangoli , poichè essi sono metà de' rettangoli d' ugual base ed altezza .

391. PROBLEMA . *Sopra un dato lato ab costruire una Figura simile a una data ABCDE* ( Fig. 243. ) .

Dall'uno degli angoli A della Figura tiro delle rette AC , AD agli angoli opposti : all' estremità  $a , b$  della data retta  $ab$  faccio gli angoli  $cab , cba$  uguali ciascuno a ciascuno agli angoli CAB , CBA ;

CBA; ed in conseguenza il triangolo  $cab$  è simile al triangolo, CAB: all'estremità  $a$ ,  $c$  della retta  $ac$  formo gli angoli  $dac$ ,  $dca$  uguali ciascuno a ciascuno agli angoli DAC, DCA, e'l triangolo  $dac$  è altresì simile al triangolo DAC. Finalmente, all'estremità  $a$ ,  $d$  della retta  $ad$  faccio gli angoli  $ead$ ,  $eda$  uguali ciascuno a ciascuno agli angoli EAD, EDA, e'l triangolo  $ead$  è simile al triangolo EAD: così, composte essendo le Figure  $abcde$ , ABCDE d'egual numero di triangoli simili ciascuno a ciascuno, sono simili fra loro ( N. 164. ).

392. PROPOSIZIONE XCI. *Le Figure simili sono fra loro come i quadri de' loro lati omologhi, o delle linee similmente poste.*

Sieno, come nella Figura 244, due rettangoli simili, tal che  $a'$  abbia  $a. b : : c. d$ ; faccio i quadri  $aa$  dell'altezza  $a$  del primo e  $cc$  dell'altezza  $c$  del secondo. Ora, avendo il quadrato  $aa$  la medesima altezza del primo rettangolo  $ab$ , queste due Figure sono fra loro come le lor basi  $a, b$  ( N. 373. ); onde  $aa, ab : : a, b$ . Per la stessa ragione abbiamo  $cc. cd : : c. d$ : ma le ragioni  $a, b$ , e  $c, d$  sono uguali a motivo de' rettangoli simili  $ab, cd$ ; dunque le ragioni  $aa, ab$ , e  $cc, cd$  sono altresì uguali; e però noi abbiamo  $aa. ab : : cc. cd$ , ovvero  $aa. cc : : ab. cd$ ; dal che scorgefi, ch'i rettangoli  $ab, cd$  sono fra loro come i quadri  $aa, cc$  de' loro lati omologhi  $a, c$ .

Ora, per la somiglianza delle Figure  $ab, cd$ , abbiamo  $a. c : : b. d$ ; dunque  $aa. cc : : bb. dd$ : ma i due rettangoli sono fra loro come i quadri  $aa, cc$  delle lor' altezze; onde essi sono pure come i quadrati  $bb, dd$  delle lor basi. Nello stesso modo si proverà, che gli stessi sono come i quadri delle linee similmente poste, mercè che elle son fra loro come le basi, o come l'altezze ( N. 165. ).

I parallelogrammi simili essendo uguali a' rettangoli d'ugual base ed altezza, sono fra lor come i quadri de' loro lati omologhi, o delle linee similmente poste. Lo stesso dicasi de' triangoli simili, poichè essi sono metà de' rettangoli d'ugual base ed altezza.

Quanto a' Poligoni simili regolari od irregolari, egli è evidente, ch'essendo queste Figure composte d'uno stesso numero di triangoli simili ciascuno a ciascuno, saran tutti questi triangoli fra loro come i quadrati delle lor basi, ec. P. e. nella Fig. 243 i triangoli ABC,  $abc$  faranno fra loro come i quadri delle lor basi BC,  $bc$ : così pure i triangoli ACD,  $acd$  faran tra loro come i quadri delle lor basi CD,  $cd$ , o come i quadri delle basi BC,  $bc$ , a cagione di BG.  $bc : : CD, cd$ , e così successivamente; ed in conseguenza

le

le Figure faranno altresì fra loro come i quadrati di  $BC$ ,  $bc$ , o di  $CD$ , *ed. ec.*

Finalmente, giacchè i Circoli son de' poligoni, essi sono fra loro come i quadrati de' loro diametri, *ec.*

393. PROPOSIZIONE XCII. *Se tre linee  $a$ ,  $b$ ,  $c$  (Fig. 245.), sono in proporzione continua, il quadrato della prima è a quel della seconda, come la prima alla terza.*

Faccio 'l rettangolo  $ab$  della prima per la seconda, e v'aggiugno il quadro  $aa$  della prima. Faccio altresì il rettangolo  $bc$  della seconda per la terza, e v'aggiugno il quadrato  $bb$  della seconda. Poichè il quadro  $aa$  e 'l rettangolo  $ab$  hanno uguale altezza, essi sono fra loro come le lor basi  $a$ , e  $b$ ; onde  $aa.ab :: a.b$ , e per la medesima ragione  $bb.bc :: b.c$ : ma per ipotesi le ragioni  $a.b$ , e  $b.c$  sono uguali; dunque  $aa.ab :: bb.bc$ , ovvero  $aa.bb :: ab.bc$ ; e perchè i rettangoli  $ab$ ,  $bc$  hanno una comun dimensione  $b$ , sono tra loro come le lor dimensioni disuguali  $a$ ,  $c$ ; e però  $ab.bc :: a.c$ , ed in conseguenza  $aa.bb :: a.c$ ; il che fa comprendere, che 'l quadrato della prima linea  $a$  è a quel della seconda, come la prima alla terza.

394. AVVERTIMENTO. Avrei potuto dimostrare queste proposizioni come ho fatto nell'Algebra; ma mi sono servito d'altro metodo per far vedere, che dedur si possono le verità Geometriche dai più semplici principj di questa scienza in un modo ancora più naturale dell'Algebraico.

395. PROPOSIZIONE XCIII. *Se sopra i tre lati d'un triangolo rettangolo  $ABC$  (Fig. 246.) si costruiscono tre Figure simili, la Figura  $AHLC$  fatta sopra l'ipotenusa  $AC$  è uguale all'altre due  $ADEB$ ,  $BFGC$  fatte sopra gli altri due lati  $AB$ ,  $BC$ .*

Simili essendo le tre Figure, esse son fra loro come i quadri de' loro lati omologhi  $AC$ ,  $AB$ ,  $BC$ : ma il quadro di  $AC$  è uguale a' quadri degli altri due lati  $AB$ ,  $BC$  (N. 171.); dunque la Figura  $AHLC$  è uguale all'altre due.

396. COROLLARIO I°. *Se sopra i tre lati  $AC$ ,  $AB$ ,  $BC$  (Fig. 247.) del triangolo rettangolo  $ABC$  si descrivono de' semicircoli  $AEBRC$ ,  $AHB$ ,  $BSC$ , il triangolo  $ABC$  è uguale alle due porzioni di circoli  $AHBE$ ,  $BSRC$ , che Lunette comunemente s'appellano.*

Simili essendo i semicircoli, essi sono fra loro come i quadrati de' lor diametri (N. 392.), ed in conseguenza il semicircolo  $AEBRC$  è uguale agli altri due; e d'amendue le parti levando i seg-



segmenti comuni AEB, BRG, resta il triangolo ABC uguale alle due Lunette.

397. COROLLARIO II. Se 'l triangolo rettangolo ABG ( Fig. 248. ) è isoscele, qualsivoglia Lunetta è uguale alla metà del triangolo ABC; cioè, dal vertice B abbassando la perpendicolare BT, la Lunetta AHBE equivale al triangolo ABT, e la Lunetta BSCR al triangolo BTC.

I due semicircoli AHB, BSC sono uguali, a cagione de' diametri uguali AB, BC, ed i segmenti AEB, BRC sono altresì uguali, a motivo delle corde uguali AB, BC: dai due semicircoletti levando dunque i due segmenti, le due Lunette rimanenti saranno uguali. Ora queste due Lunette equivagliano al triangolo ABC; onde ciascuna d'esse vale la metà di detto triangolo.

398. AVVERTIMENTO. Nel solo caso, in cui 'l triangolo rettangolo ABC è isoscele, si può in particolar rinvenire 'l valore di qualsivoglia Lunetta; ed allora l'una o l'altra di esse appellasi Lunetta d'Ippocrate celebre Matematico, che fioriva nel tempo de' Greci, e che fu 'l primo a ritrovarne la quadratura: ora in questa Lunetta conviene osservare, ch'il quarto di circolo BTCR equivale al semicircolo BSC; imperocchè, uguale essendo il triangolo BTC alla Lunetta BSCR, se dall'una e dall'altra parte s'aggiugne il segmento BRC, s'avrà 'l quarto di circolo BTCR uguale al semicircolo BSC. E quindi il rinomatissimo Inglese M<sup>o</sup>. Wisthon ha ritrovato il modo di dividere la Lunetta d'Ippocrate in quante si voglia parti, come mostreremo nel seguente Problema.

399. PROBLEMA. Dividere la Lunetta d'Ippocrate BSCR in quante si voglia parti ( Fig. 249. ).

Dal centro T del quarto di circolo tiro pel centro O del semicircolo la retta TS, che divide la Lunetta in due parti BSR; RSC: così, posto che s'abbia a dividerla in quattro parti uguali, divido in quattro egualmente il diametro BC, e da' punti di divisione alzo delle perpendicolari MP, ZY; quindi da' punti P, Y tirando le rette PT, YT, che segan la circonferenza del quarto di circolo in H, V, dico, che le parti della Lunetta SRHP, SRVY ne sono ciascuna il quarto; ciò che io dimostro in questo modo.

Tiro le rette OP, TM, e a cagione delle parallele PM, ST i triangoli PMO, PMT, che hanno la stessa base PM, e che trovansi fra due parallele, sono uguali (N.374.); poi dall'una e dall'altra parte levo la parte comune PXM, e resta il triangolo POX uguale al triangolo MXT.

Nel

Nel triangolo ifoscele POT, uguale essendo l'angolo esterno POS ai due interni opposti, egli è in conseguenza doppio dell'angolo OTP: ora, perchè il quarto di circolo BOCR è uguale al semicircolo BSC, ne segue, che l'intero circolo del raggio BT è doppio dell'intero circolo del raggio OB, e che per conseguenza il settore SOP del semicircolo è uguale al settore RTH del quarto di circolo, a motivo dell'angolo SOP doppio dell'angolo RTH. Da questi due settori levando dunque la parte comune ORL, il residuo SRLP equivale al residuo LOTH; e ad amendue le parti aggiugnendo PLH, ho SRHP uguale al triangolo POT, o ai due triangoli POX, OXT. Finalmente, in vece del triangolo POX, ponendo il triangolo XMT, che gli è uguale, abbiamo SRHP uguale al triangolo OTM: ma poichè il triangolo OMT ha la medesima altezza OT del triangolo BTC, egli non è ch' il quarto di detto triangolo, mercè che la sua base OM è l' quarto della base BC ( N. 376. ); onde la parte SRHP equivale al quarto del triangolo PTC, o al quarto della Lunetta BSCR uguale al triangolo BTC.

400. PROBLEMA. Ritrovare un quadrato uguale a più quadrati dati, ed una Figura simile ed uguale a più Figure simili ( Fig. 250. ).

Supponiamo, che le rette AB, BC sieno i lati de' due primi quadri dati; con esse formo un'angolo retto ABC, e tirando la retta AC ho l' triangolo rettangolo ABC, in cui l' quadrato di AC equivale a' quadri degli altri due lati AB, BC ( N. 171. ); prendo il lato CD del terzo quadro dato, e con esso ed AC formando un'angolo retto ACD tiro la retta AD, il che mi dà un' altro triangolo rettangolo ACD, in cui l' quadrato di AD è uguale a' quadri di AC, e DC: ma quello di AC equivale a' quadri di AB, BC; dunque l' quadrato di AD è uguale ai tre primi quadri dati: e continuando nello stesso modo, troverò l' quadrato di AE uguale ai quattro primi quadri dati; onde, facendo il quadrato di AE, s'avrà ciò che si cerca, e così degli altri.

Che se si ricercasse una Figura simile ed uguale a più Figure simili, porrei invece delle rette AB, BC, CD, DE, ed i lati omologhi di queste Figure; dopo di che la Figura simile fatta sopra AE sarebbe uguale alle quattro Figure date, ec. mercè che le Figure simili sono fra lor come i quadri de' loro lati omologhi.

401. PROPOSIZIONE XCIV. Se in un circolo ( Fig. 251. ) tiransi due diametri AC, BD, che fra loro formino un'angolo acu-

to, e che da' loro termini A, B tirinsi delle tangenti AV, BR, che vadano a terminare ai diametri, e che si sghino in H; dico, 1.<sup>o</sup> che i triangoli AVO, BRO, formati dai due diametri con ciascuna delle tangenti, sono uguali. 2.<sup>o</sup> Che i triangoli AHR, BHV, formati dalle tangenti con ciascun diametro, sono altresì uguali.

Per essere le tangenti perpendicolari ai diametri ne' punti A, B, i triangoli AVO, BRO sono rettangoli; e per essere l'angolo acuto O comune, e'l lato AO uguale al lato BO, questi due triangoli son'uguali ( N. 100. ). Ciò che doveasi 1.<sup>o</sup> dimostrare.

Da' due triangoli uguali AVO, BRO levando dunque il comun trapezoide AHBO, il residuo VHB è uguale al residuo RHA. Ciò che doveasi 2.<sup>o</sup> dimostrare.

402. COROLLARIO. Se dall'estremità A, B de' diametri tiransi delle perpendicolari AX, BF sopra i diametri opposti, il triangolo AVX, formato fra i diametri dall'una delle perpendicolari AX e dalla tangente AV tirata dal medesimo punto A, è uguale al trapezoide AXBR fatto fra i diametri dalla stessa perpendicolare AX, e dall'altra tangente BR.

Per la precedente proposizione, il triangolo VHB equivale al triangolo AHR; dunque, a ciascuno d'essi aggiugnendo il comun trapezoide AHBX, s'avrà  $AVX = BRAX$ .

403. PROPOSIZIONE XCV. Posto che dati sieno i due diametri AC, BD ( Fig. 252. ) colle lor tangenti AV, BR, se da qualsivoglia punto S preso sopra la circonferenza tiransi infra i diametri due rette LZ, MT parallele alle tangenti AV, BR, il triangolo LST, formato da queste due parallele coll'uno de' diametri DB prolungato in V, equivale al trapezoide BRMT formato dalla tangente BR di esso diametro DBV e dalla sua parallela MT; e'l triangolo MSZ, formato dalle stesse parallele coll'altro diametro CAR, è uguale al trapezoide AVLZ formato dalla tangente AV di questo diametro, e dalla sua parallela.

Dal punto A tiro AX perpendicolare a DB, ed ho  $AVX = BRAX$  ( N. 402. ). Ora, per la perpendicolare AX parallela alla tangente RB e alla sua parallela MT, e per LZ parallela ad AV, i triangoli VAX, LST son simili, e sono fra lor come i quadri de' loro lati omologhi ( N. 392. ); onde  $VAX . LST :: \overline{AX} . \overline{ST}$ . Ma per la proprietà del circolo abbiamo  $\overline{AX} = \overline{BO} - \overline{XO}$  ( N. 284. ), ed  $\overline{ST} = \overline{BO} - \overline{TO}$ ; dunque  $VAX . LST$   
::

: :  $\overline{BO} - \overline{XO}$ .  $\overline{BO} - \overline{TO}$ : ora, simili essendo i triangoli BRO, TMO, XAO, sono fra lor come i quadri  $\overline{BO}^2$ ,  $\overline{TO}^2$ ,  $\overline{XO}^2$  de' loro lati omologhi BO, TO, XO ( N. 393. ); dunque, invece de' quadrati ponendo i triangoli, avremo VAX. LST :: BRO — XAO. BRO — TMO, ovvero VAX. LST :: BRAX. BRMT: ma l' antecedente VAX equivale all' antecedente BRAX; onde l' conseguente LST equivale al conseguente BRMT; e lo stesso si proverà ogni qual volta la parallela ST segnerà l' diametro BD infra'l centro O, e l' punto B.

Ma se l' punto Q, da cui tiransi le rette QL, QE parallele alle tangenti AV, BR, è talmente posto, che la parallela QE segghi l' diametro BD al di sotto di O; all' estremità D tiro la tangente DF, che segghi RC prolungato in F, e siccome il triangolo LQP, formato dalle due parallele col diametro BD, è ancora simile al triangolo VAX, ho parimente VAX. LQP :: AX. QP ::  $\overline{BO} - \overline{XO}$ .  $\overline{OD} - \overline{OP}$ , e in vece de' quadrati ponendo i triangoli BRO, AXO, ODF, OPE, che sono fra loro come questi quadri, avremo VAX. LQP :: BRO — AXO. ODF — OPE, chòè VAX. LQP :: BRAX. DFEP: ma VAX = BRAX; dunque LQP = DFEP: così l' triangolo LQP, formato col diametro BD dalle parallele QL, QE tirate dal punto Q, è sempre uguale al trapezoide DFEP formato da queste stesse parallele colla tangente DF; e lo stesso avverrebbe ancora, se'l punto, da cui tiransi le parallele alle tangenti, fosse preso sopra la semicirconferenza BCD. Il che dovea 1°. dimostrarsi.

Ora a fin di provare, ch' il triangolo MSZ, formato coll' altro diametro AC dalle parallele LZ, MT, è uguale al trapezoide AVLZ fatto dalla tangente AV di esso diametro e dalla sua parallela LZ, basterebbe, che dal vertice B dell' altro diametro tirassi una perpendicolare B<sub>3</sub> sopra AC, e che terminassi l' rimanente come sopra: ma siccome non riuscirebbe questa dimostrazione per rapporto alle Sezioni Coniche, eccone un' altra comune ad esse, ed al Circolo.

Noi abbiamo VAX = BRAX ( N. 402. ); e da VAX levando il triangolo LST, e da BRAX il trapezoide BRMT uguale al triangolo LST, come s' è veduto, avremo AVLSTX = MTXA; poi levando la parte comune STX<sub>2</sub>, avremo AVL<sub>2</sub>

E 2 =

=  $MS_2A$ ; e ad amendue le parti aggiugnendo il triangolo  $A_2Z$ , s' avrà finalmente  $AVLZ = MSZ$ .

Se 'l punto  $Q$ , da cui son tirate le parallele  $QL$ ,  $QE$  alle tangenti, è talmente posto, che la parallela sia al di sotto del centro  $O$ , dal punto  $D$  tiro una tangente  $KDF$ , che segghi  $AC$  prolungato in  $F$ , e la tangente  $AV$  prolungata in  $K$ ; i triangoli rettangoli  $BRO$ ,  $DOF$  son simili ed uguali, a cagione di  $BO = OD$ , e degli angoli sopra  $BO$  uguali ciascuno a ciascuno agli angoli sopra  $DO$ . Ora, il triangolo  $BRO$  equivale al triangolo  $AVO$  ( N. 401. ); dunque  $AVO = FOD$ : poi d'amendue le parti levando il trapezio  $AKDO$  abbiamo  $VKD = AKF$ ; e da  $VKD$  levando il triangolo  $LQP$ , e da  $AKF$  il trapezoide  $PEFD$  uguale al triangolo  $LQP$ , come sopra s'è veduto, resta  $VLQPKD = AEPDK$ ; finalmente, d'amendue le parti togliendo la parte comune  $AKDPQZ$ , avremo  $VAZL = ZQE$ , cioè 'l triangolo  $ZQE$ , fatto dalle parallele tirate dal punto  $Q$  col diametro  $AC$ , uguale al trapezoide  $AVLZ$ , fatto dalla tangente  $AV$  di questo diametro, e dalla sua parallela.

Se 'l punto  $Q$ , da cui tiransi delle parallele alle tangenti, fosse sopra la semicirconfenza  $BCT$  ( Fig. 253. ), tal che la parallela  $QT$  segasse il diametro  $BD$  al di sopra di  $O$ , la similitudine de' triangoli  $QVL$ ,  $VAX$  conchiuder sarebbe come prima; che 'l triangolo  $TLQ$  fatto col diametro  $BD$  equivale al trapezoide  $BRMT$ ; poi dal punto  $C$  tirando la tangente  $CK$ , che sega  $BD$  in  $t$  ed  $MA$  in  $K$ , troverebbesi come sopra, ch' il triangolo  $QME$  fatto coll' altro diametro è uguale al trapezoide  $ELtC$  formato dalla tangente  $Ct$  di esso diametro, e dalla sua parallela.

Comprendesi in fine dalla Figura 254, che se 'l punto  $Q$  fosse sopra la semicirconfenza  $BCD$ , e la parallela  $QT$  segasse  $BD$  al di sotto di  $O$ , converrebbe da questa parte far ciò, che s'è fatto dall' altra nella Figura 252. Il che doveasi 2°. dimostrare.

**AVVERTIMENTO.** Esenzialissime sono per le Sezioni Coniche questa, non meno che la precedente Proposizione; anz' io premetto per avviso, che quando queste perfettamente si sappiano, con tutto ciò ch' abbiamo detto intorno 'l circolo, farà cosa mirabile, allorchè si tratterà delle Sezioni Coniche, di vedere, che lo Studio di queste Curve altro non è ch' un' applicazion naturale de' più semplici principj.

*Del cangiamento delle Figure, e della lor riduzione di maggiori in minori, e di minori in maggiori.*

404. *Data qualsivoglia figura ABCDEF ( Fig. 282. ) fare un triangolo, che le sia uguale.*

Dalla data Figura levo mediante la diagonale AC un triangolo ABC; dal vertice B tiro la retta BP parallela ad AC, finchè segghi in P uno de' lati AF prolungato; ciò che mi dà un quadrilatero PBCA, in cui tirando l'altra diagonale PC, ho due triangoli BAC, CPA uguali, mercè che hanno la stessa base CA, e sono fra le due parallele CA, BP. Dunque, dalla data Figura levando il triangolo BAC ed in sua vece sostituendo il triangolo PAC, ho la figura PCDF uguale alla data, e minore di un angolo.

Colla diagonale DF sego il triangolo DEF; dal vertice E di detto triangolo tiro EH parallela a DE, finchè concorra nel lato AF prolungato in H; il che mi dà l'quadrilatero FDEH, in cui tirando l'altra diagonale DH, ho due triangoli uguali FED, FHD, poichè hanno la base comune FD, e sono fra due parallele. Dunque, dalla figura PCDF levando l' triangolo FDE ed in sua vece sostituendo il triangolo FDH, ho la figura PCDH uguale alla data, e minore di due angoli.

Da questa figura levo mediante la diagonale CH il triangolo CDH; poi dal vertice D di detto triangolo tiro DR parallela a CH, finchè concorra nel lato AF prolungato in R; e tirando la retta CR, uguali sono i triangoli CDH, CHR, per avere la medesima base CH, e per essere fra due parallele: così, in vece di CDH sostituendo CHR, ho l' triangolo PCR uguale alla figura data.

405. PROBLEMA. *Costruire un rettangolo uguale a un dato triangolo ABC ( Fig. 255. )*

Dal vertice B sopra la base AC tiro la perpendicolare BS; divido per mezzo BS in R, e colla base AC ed altezza CR faccio l' rettangolo AEDC uguale al dato triangolo ABC, per essere ABC uguale alla sua base AC moltiplicata per la metà della sua altezza BS, cioè per SR ( N. 375. ), e per essere il rettangolo AEDC uguale al medesimo prodotto.

Ovvero, divido per mezzo in R la base AC del triangolo ( Fig. 256. ), e colla metà AR ed altezza BS del triangolo faccio un rettangolo AEDR uguale al triangolo dato.

Poi-

Poichè, il rettangolo AEFC d' uguale altezza e base del triangolo è doppio del triangolo: ora avendo i rettangoli AEDR, AEFC la medesima altezza AE, sono fra loro come le lor basi AR, AC (N. 373.): dunque, essendo AEDR la metà di AEFC, egli è per conseguente uguale al triangolo.

406. PROBLEMA. *Dato un triangolo ABC ( Fig. 257. ) costruire un parallelogrammo, che li sia uguale, e che abbia un' angolo dato.*

Dal vertice B tiro EF parallela alla base AC; in A faccio un' angolo CAE uguale all' angolo dato, e terminando il parallelogrammo AEFG sего per mezzo AC in P, da cui io tiro PB parallela ad AE; il che mi dà'l triangolo ABC uguale al parallelogrammo AEBP; imperocchè, avendo i parallelogrammi AEBP, AEFC la medesima altezza, sono fra loro come le lor basi AP, AC, cioè'l parallelogrammo AEBP è la metà del parallelogrammo AEFC: ora, anche il triangolo ABC è la metà del parallelogrammo AEFC; dunque, ec.

Ovvero divido per mezzo in H il lato AE, e da detto punto tiro HR parallela ad AC; ciò che mi dà il parallelogrammo AHRC uguale al triangolo, per essere sì l'uno che l'altro la metà del parallelogrammo AEFC.

407. PROBLEMA. *Data qualsivoglia figura costruire un rettangolo, od un parallelogrammo, che le sia uguale.*

Cangio perciò la figura in un triangolo ad essa uguale (N. 404.), e con esso io formo il rettangolo, o'l parallelogrammo cercato ( N. 405. 406. ).

408. PROBLEMA. *Costruire un quadro uguale ad un parallelogrammo, o triangolo, o a qualunque data figura.*

Affine di costruire un quadrato uguale al parallelogrammo ABCD ( Fig. 258. ), piglio una media proporzionale AE infra l' altezza AB, e la base AD; e'l quadro AF fatto sopra questa proporzionale uguaglia il rettangolo; imperocchè avendo noi  $AB : AE :: AE : AD$ , abbiamo altresì  $AE = AB \times AD$ : ora  $AB \times AD$  è'l parallelogrammo; onde il quadro AF è uguale a detto parallelogrammo.

Se la data figura è un triangolo, prendo una media proporzionale fra la metà della sua altezza, e la sua base; ed equivalendo il quadro di questa media proporzionale al prodotto degli estremi, egli è in conseguenza uguale al dato triangolo.

In

In fine, se la figura è un poligono regolare, io la riduco in triangoli, e termino l' rimanente come s'è detto.

409. PROBLEMA. *Cangiar un triangolo in un' altro, di cui sia data una base, od un' altezza.*

Sia ABC ( Fig. 259. ) il triangolo, che si vuol cangiar in un' altro, ch'abbia l'altezza EH. Cerco una quarta proporzionale alla data altezza EH, all'altezza BD del triangolo ABC, e alla sua base AC; all'estremità H dell'altezza EH alzo la perpendicolare RP, ch'io faccio uguale alla quarta proporzionale ritrovata; e tirando le linee RE, PE, il triangolo REP, di cui EH è l'altezza; equivale al dato triangolo ABC, poichè per la costruzione l'altezze EH, BD di questi due triangoli son reciproche alle basi AC, RP; dunque i due triangoli son uguali ( N. 376. ).

Se vogliamo, ch'il triangolo ABC sia cangiato in un' altro, ch'abbia per base RP; cerco una quarta proporzionale alle basi RP, AC, e all'altezza BD; e sopra RP alzando una perpendicolare HE, ch'io faccio uguale alla quarta proporzionale ritrovata, tiro le rette RE, EP, che mi danno il triangolo REP uguale al triangolo ABC, a motivo delle basi RP, AC reciproche per la costruzione all'altezze BD, EH.

410. COROLLARIO. *Nel modo stesso si cangerà un rettangolo, od un parallelogrammo in un' altro, di cui sia data una base, od un' altezza.*

411. COROLLARIO. Così pure, se si volesse cangiar qualsivoglia poligono regolare, od irregolare in un triangolo, di cui data fosse una base, od un' altezza; prima si cangerebbe detta figura in triangolo ( N. 404. ), e quindi l' triangolo cangerebbe in un' altro, di cui fosse data la base, o l'altezza: e se l' poligono si volesse cangiar in un rettangolo, o parallelogrammo, di cui data fosse un' altezza, od una base; detto poligono prima si cangerebbe in rettangolo, o parallelogrammo ( N. 407. ), e quindi l' rettangolo, o parallelogrammo cangerebbe in un' altro, di cui fosse data la base, o l'altezza ( N. 410. ).

412. PROBLEMA. *Costruire una Figura uguale a più Figure date.*

Riduco le date figure in triangoli ( N. 404. ), ch'io suppongo essere i tre ABC, EFD, HIL ( Fig. 260. ), li qual'io riduco ad una medesima altezza IM ( N. 409. ), ovvero, il ch'è lo stesso, cerco la base LP, che dar conviene al triangolo ABC, affinch' egli possa avere l'altezza IM; pongo questa base in diritto colla



colla base HL, e tirando la retta PL, il triangolo PLI equivale al triangolo ABC ( N. 376. ); e per conseguente il triangolo HIP equivale ai due HIL, ABC.

Cerco altresì la base PQ da darsi al triangolo EFD, affinch'egli aver possa l'altezza IM, e ponendo detta base in diritto con HP, e tirando la retta QI, il triangolo PQI uguaglia EFD; onde l'intero HIQ è uguale ai tre triangoli, e per conseguente alle tre figure date.

413. PROBLEMA. *Date due Figure X, Q ( Fig. 261. ) ritrovare una terza simile alla prima X, ed uguale alla seconda Q.*

Riduco la figura X in un triangolo, ch'io poscia cangio in un altro AMB, il quale abbia per base il lato AB; cangio parimente la figura Q in un triangolo BMP, che abbia la medesima altezza del triangolo AMB: così l' triangolo AMP è uguale alle due date figure. Sopra AP descrivo un semicircolo APR, e in B alzo la perpendicolare BR, su cui costruisco la figura Y simile alla figura X; e dico, che la figura Y equivale alla figura Q.

Imperocchè, uguale essendo l'altezza de' triangoli AMB, BMP, essi sono fra loro come le lor basi AB, BP: ma  $AMB = X$ , e  $BMP = Q$ ; dunque  $X : Q :: AB : BP$ : ora, le figure simili

X, Y sono fra lor come i quadri  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BR}$  de' loro lati omologhi AB, BR ( N. 392. ); e poichè nel semicircolo APR la linea BR è media proporzionale fra i segmenti AB, BP, abbiamo  $AB : BR :: BR : BP$ ; onde si ha parimente  $\overline{AB} : \overline{BR} :: AB : BP$ , ed in conseguenza  $X : Y :: AB : BP$ : ma già si è trovato  $X : Q :: AB : BP$ ; dunque  $X : Y :: X : Q$ ; il che ci dà  $Y = Q$ .

414. COROLLARIO. Si può dunque con tal mezzo cangiare più figure, che non sieno fra loro simili, in un medesimo numero di figure perfettamente simili all'una delle date.

415. PROBLEMA. *Dato il lato d'un Poligono regolare trovar il Poligono.*

Sia AB la retta ( Fig. 262. ), su cui si vuol descrivere un pentagono regolare; con qualsivoglia raggio OM descrivo un circolo, in cui v' iscrivio un pentagono regolare, ch'io divido ne' fuoi cinque triangoli uguali; quindi sopra la retta AB costruisco un triangolo ARB simile al triangolo MON, facendo gli angoli A, B uguali ciascuno a ciascuno agli angoli M, N, finalmente, dal

dal vertice R preso per centro col raggio RA descrivo un circolo, in cui cinque volte portando la corda AB, ho'l pentagono cercato; poichè l'angolo ARB uguale all'angolo MON vale la quinta parte della circonferenza ABVTX, siccome l'angolo MON vale la quinta della circonferenza MNPQT.

416. PROBLEMA. *Ridurre qualsivoglia figura in Poligono regolare.*

Cangio la data figura in un triangolo, ch'io suppongo essere il triangolo ABC (Fig. 263.) ; divido la sua base AC in cinque parti uguali, e da' punti di divisione tiro al vertice le rette DB, EB, ec. che dividono il triangolo in cinque triangoli uguali, mercè che tutti hanno la medesima altezza, e le basi uguali. Con qualsivoglia raggio OR descrivo un circolo, in cui v'iscrivo un pentagono, ch'io divido ne' suoi cinque triangoli. Faccio un triangolo TSV simile all'uno de' triangoli ROT del pentagono, ed uguale al triangolo ABD quinta parte del triangolo ABC (N. 413.); e dal vertice V col raggio VT descrivendo un circolo, porto ST cinque volte intorno la circonferenza, il che ci dà un pentagono uguale al triangolo ABC, ed in conseguenza alla data figura; poichè i cinque triangoli di questo pentagono sono uguali a' cinque triangoli, che compongono il triangolo ABC, e l'angolo TVS abbraccia la quinta parte della circonferenza del suo circolo, siccome l'angolo ROT suo uguale ne abbraccia la quinta della circonferenza del suo.

417. PROPOSIZIONE XCVI. *Se dato qualsivoglia quadrilatero ABCD (Fig. 264.) colle sue diagonali AC, BD dividesi per mezzo in E l'uno de' lati AB, e che da detto punto di divisione tirisi la retta EF parallela all'una delle diagonali AC, quindi dal punto F la retta FG parallela all'altra diagonale BD, dal punto G la retta HG parallela alla diagonale AC, e finalmente dal punto H la retta HE parallela alla diagonale BD; io dico, che quest'ultima parallela segnerà il lato AB nel punto E, il quale lo divide in due parti eguali, e che la figura EFGH sarà un parallelogramma metà del quadrilatero dato.*

Nel triangolo ABC parallele essendo le basi AC, EF, elle segnano proporzionalmente i lati AB, BG: ora AB è segato per mezzo in E; dunque BG è altresì in due parti uguali segato in F. Per la medesima ragione, nel triangolo BCD, le cui basi BD, FG son parallele, il lato CD è segato per mezzo in G, e nel triangolo CDA, le cui basi AC, GH sono parallele, il lato AD

è legato per mezzo in H: così nel triangolo ABD, la linea HE tirata dal punto H parallela alla base dee segare il lato AB nel punto E, che lo divide per mezzo; ciò che doveasi 1.<sup>o</sup> dimostrare.

Parallele essendo le rette EF, HG alla medesima retta AC, sono fra loro parallele: per la medesima ragione, sono fra loro parallele le rette EH, FG parallele alla stessa retta BD; dunque la figura EFGH è un parallelogrammo; ciò che doveasi 2.<sup>o</sup> dimostrare.

Fra loro essendo i triangoli simili ABC, EBF come i quadri de' loro lati omologhi AB, EB ( N.392. ), che sono come 2 ad 1, ne segue, che detti due triangoli sono fra loro come 4 è ad 1, cioè l' triangolo EBF è l' quarto del triangolo ABC; e per la medesima ragione HGD è l' quarto del triangolo ACD: così, li due EBF, HGD pres' insieme sono l' quarto del quadrilatero ABCD; Proveremo altresì, ch' essendo l' triangolo EAH il quarto del triangolo BAD, e l' triangolo FCG il quarto del triangolo BCD, i due EAH, FCG presi insieme sono parimente l' quarto del quadrilatero ABCD; levando dunque dal quadrilatero i quattro triangoli EBF, HDG, EAH, FCG, che vagliono i due quarti, o la metà del quadrilatero, il residuo, cioè l' parallelogrammo EFGH sarà la metà di detto quadrilatero.

418. COROLLARIO. *Se l' quadrilatero ha uno de' suoi angoli rientranti ( Fig.265. ), sempre si proverà, ch' il parallelogrammo EFGH n' è la metà.*

Prolungo le parallele EH, FG e la diagonale BD, finattanto ch' seghino l' altra diagonale AC ne' punti M, N, R; e proverò come sopra, ch' il triangolo EBF è l' quarto del triangolo ABC, ch' il triangolo AEM è l' quarto del triangolo ABR, e ch' il triangolo CFN è l' quarto del triangolo BRC; dal che ne segue, ch' i tre triangoli EBF, AEM, CFN sono insieme i due quarti, o la metà del triangolo ABC, e ch' in conseguenza il parallelogrammo rimanente EFNH è la metà di detto triangolo, o del quadrilatero ABCD, più la metà del triangolo ADC, cioè  $EFNM = \frac{1}{2}ABCD + \frac{1}{2}ADC$ .

Ora, uguali essendo nel triangolo ADC i tre triangoli HDG, AHM, CGN alla metà di esso triangolo, il rimanente HGNM ne vale l' altra metà; ed abbiamo  $HGNM = \frac{1}{2}ADC$ : ma egli s' è già ritrovato  $EFNM = \frac{1}{2}ABCD + \frac{1}{2}ADC$ ; onde, dal primo membro levando il parallelogrammo HGNM, e dall' altro  $\frac{1}{2}ADC$ , che gli è uguale, avremo  $EFGH = \frac{1}{2}ABCD$ .

419. PRO.

419. PROPOSIZIONE XCVII. *Data qualsivoglia figura ABG ( Fig. 266. ), se da un punto preso fuori, o dentro la Figura tiransi le rette OA, OC, OB a ciascun'angolo, e che divisa l'una di esse OA in qualsivoglia ragione in E, dal punto E tirisi la retta EF parallela alla base AC del triangolo AOC, quindi dal punto F la retta FH parallela alla base BC del triangolo conseguente COB, e così a mano a mano l'ultima parallela HE passerà pel punto E, e la figura EFH formata da dette parallele sarà simile alla Figura ABC.*

Nel triangolo AOC, la parallela EF sega il lato OC nella stessa ragione del lato OA: così pure nel triangolo COB la parallela FH sega il lato OB nella medesima ragione del lato OC; dunque OB è legato in H nella stessa ragione che AO lo è in E; ed in conseguenza la parallela tirata dal punto H passerà per E. Il che doveasi 1<sup>o</sup>. dimostrare.

Il triangolo OEF è simile al triangolo OAC, a motivo dell'angolo comune O, e delle basi parallele EF, AC; per ciò anche il triangolo OFH è simile al triangolo OCB, e' il triangolo OHE al triangolo OBA; essendo dunque le due Figure ACB, EFH composte d'un'egual numero di triangoli simili, elle sono altresì simili fra loro.

420. COROLLARIO. Se 'l punto O fosse preso sul perimetro della figura ( Fig. 267. ), proverebbesi come sopra, che EF, FH, e formerebbono una Figura EFHRS simile alla Figura APBDG.

421. PROBLEMA. *Data una Figura ABCD ( Fig. 268. ) descriverne un'altra simile, e che con essa sia in qualsivoglia ragione.*

Prendo un punto O od entro la Figura, o fuori, o sul perimetro, o finalmente all'uno degli angoli; da detto punto tiro delle rette a ciascun'angolo, e supponendo, che la Figura ricercata non abbia ad essere che la metà della data, divido per mezzo in R l'una delle rette OA; cerco una media proporzionale OE infra OR ed OA, e da E tiro EH parallela ad AB, poi HS parallela a CB, e così successivamente; il che mi dà la Figura EHSV simile e metà della data. Poichè, queste Figure sono fra loro come i quadrati delle linee OE, OA similmente poste ( N. 392. ): ma per la costruzione si ha OA . OE :: OE .

OR; dunque  $\overline{OA} . \overline{OE} :: OA . OR$  ( N. 393. ): ora OA è 'l doppio di OR; onde  $\overline{OA}$  è 'l doppio di  $\overline{OE}$ , e per conseguente la data Figura è 'l doppio della Figura EHSV.

Se vogliamo, che la Figura EHSV ( Fig. 269. ) sia l' doppio della data, prolungo OA in R, talmente che AR sia uguale ad OA; piglio una media proporzionale OE infra OA, OR; da E tiro EH parallela ad AB, ec. e la Figura EHSV è l' doppio della data: imperocchè, a motivo di OA. OE :: OE. OR,

abbiamo OA. OE :: OA. OR :: 1. 2 ( N. 393. ); ed in conseguenza la data Figura non è che la metà di EHSV.

Se vogliamo, che la Figura EHSV sia alla data, come una linea MN è ad una linea MP; cerco una quarta proporzionale OR alle tre linee MP, MN, OA, quindi una media proporzionale OE tra OA ed OR, e termino l'operazione come sopra. Ciò dimostrasi nella stessa maniera.

422. AVVERTIMENTO. Puossi abbreviare l' operazione, sovrapponendo agli angoli della Figura il punto O ( Fig. 270. ); poichè allora trovasi la Figura divisa in due triangoli di meno, e conseguentemente si hanno a tirare manco parallele: amendue i metodi sono di gran giovamento, e col mezzo loro qualsivoglia Figura riducesi di maggiore in minore, e viceversa.

423. PROBLEMA. *Dati due quadri ritrovarne quanti si voglia altri, i quali presi due a due sieno uguali ai due dati.*

Supponiamo, che le rette AB, BC ( Fig. 271. ) sieno i lati de' due dati quadri; con essi formo un'angolo retto ABC, poi tirando l'ipotenusa AC descrivo l' semicircolo ABDC, che passa pel punto B, poichè l'angolo ABC è retto. Da qualsivoglia punto D della circonferenza tiro all'estremità del diametro due rette DA, DC; e per conseguente, retto essendo ancora l'angolo ADC, i quadri delle rette AD, DG presi insieme sono uguali al quadrato della lor'ipotenusa AC: ma i quadri delle rette AB, BC presi insieme sono altresì uguali al quadrato della stessa ipotenusa.

Dunque  $\overline{AD} + \overline{DC} = \overline{AB} + \overline{BC}$ ; e siccome infiniti punti vi sono nel quarto di circonferenza ABD, egli è per se evidente, che da ciascuno d' essi tirando due linee all'estremità A, C del diametro s'avrebbero infiniti quadri, i quali presi due a due farebbero uguali ai due dati.

Quanto poi a tutt'i punti dell'altro quarto di circolo DC, egli è manifesto, che tutte le linee, le quali da detti punti tirerebbonsi all'estremità A, C, farebbono le medesime due a due di quelle, che sarebbero state tirate dal quarto di circolo ABD, e ch'in conseguenza i loro quadrati farebbon gl'istessi.

424. COROLLARIO. *Quantunque ritrovar si possano infiniti quadrati, li quali presi due a due sieno uguali, ciò non ostante giammai si troverà, ch'uguali sieno le lor Radici prese due a due; ma le due maggiori saranno le due uguali AD, DC, e l'altre AB, BC saranno tanto minori delle due uguali AD, DC, quanto elle saran più disuguali fra loro.*

Se vogliamo, che le due disuguali AB, BC prese insieme equivagliano alla somma delle due uguali AD, DC; dal punto C, e col raggio CD descrivo l'arco DE, il che mi dà  $CE = DC$ ; ed in conseguenza BE è l'eccesso del lato BC sul lato DC: similmente dal punto A e col raggio AB descrivo l'arco BR, ciò che mi dà  $AB = AR$ ; ed in conseguenza DR è l'eccesso di AD, o DC sua uguale sopra AB. Così, affinchè uguali sieno le due AB, BC alle due DC, DA, e'fa d'uopo, che l'eccesso BE, di cui BC supera DC, sia uguale all'eccesso DR, di cui DA supera BA. Ora, ciò posto.

Noi abbiamo  $BC = DC + BE$ , ed  $AB = AD - DR = DC - BE$ , a motivo di  $AD = DC$ , e di  $DR = BE$  per ipotesi; onde  $BC^2 = DC^2 + 2BE \times DC + BE^2$ , e  $AB^2 = DC^2 - 2BE \times DC + BE^2$ ; e sommando queste due equazioni, avremo  $BC^2 + AB^2 = 2DC^2 + 2BE^2$ : ma i quadrati di AD, DC sono  $AD^2 + DC^2 = 2DC^2$ ; dunque, se vera fosse l'ipotesi, i due quadri di AB, BC presi insieme eccederebbero la somma de'quadrati di AD, DC di due volte'l quadro di BE: ma egli s'è dimostrato, ch'i quadrati di AB, BC non superano i quadri di AD, DC; però, supponendo le radici AB, BC prese insieme uguali alle radici AD, DC, elle si suppongono più grandi di quel che sono.

Nello stesso modo si proverà, ch'i due lati, o le due radici AH, HC sono insieme minori delle due AB, BC, che son meno disuguali fra loro.

425. PROBLEMA. *A due date Figure ritrovare una media proporzionale.*

Se le due date Figure non sono simili, le riduco in triangoli d'ugual' altezza, affinchè sieno fra loro come le basi di detti triangoli; prendendo poscia una media proporzionale fra esse due basi, sopra detta media formo un triangolo d'ugual' altezza degli altri due, ed egli farà medio proporzionale fra gli altri due,

due, ed in conseguenza fra le due Figure: ciò ch'è per se evidente, poichè i triangoli d'ugual'altezza sono fra loro come le lor basi, e perchè per la costruzione le basi sono in proporzione continua.

Ma se le due Figure son simili, fra due de' loro lati omologhi piglio una media proporzionale, e sopra vi descrivo una Figura simile, la qual'è parimente media proporzionale fra l'altre due; imperocchè, essendo in proporzione continua i tre lati omologhi, lo saranno altresì i loro quadri. Ora, queste Figure sono fra loro come i quadri de' loro lati omologhi. Dunque, ec.

**426. PROBLEMA.** *Esprimere in linee la Ragione di più Figure date.*

Riduco le date Figure in triangoli d'uguale altezza, e le basi di detti triangoli esprimono la ragione delle Figure fra loro.

*Della Geodesia, o divisione delle Figure sul Terreno.*

**427. PROBLEMA.** *Dividere un triangolo in qualsivoglia numero di parti uguali, o disuguali in ragion data col mezzo delle linee tirate dalla base al vertice.*

Per dividere 'l triangolo ABC ( Fig. 272. ) in tre parti uguali, divido la base in tre ugualmente ne' punti E, H; da cui tirando al vertice le rette EB, HB, il triangolo trovasi diviso in tre triangoli uguali, poichè hanno la stessa altezza, e le basi uguali ( N. 376. ).

E per dividere 'l medesimo triangolo in tre parti, le quali sieno fra loro come le tre RS, SM, MN della retta RN, divido la base nella stessa ragione della retta RN; e supponendo, ch' i punti di divisione sieno E, H, al vertice B tiro delle rette, che dividano 'l triangolo in tre triangoletti, i quali sieno fra loro come le lor basi, ed in conseguenza come le rette RS, SM, MN.

**428. PROBLEMA.** *Dividere un triangolo ABC ( Fig. 273. ) in quante si voglia parti uguali, o disuguali col mezzo delle linee tirate da un punto O preso sul perimetro del triangolo.*

Se vogliamo, ch'ei sia diviso in tre parti uguali, divido 'l lato BC in tre ugualmente ne' punti D, E, e 'l triangolo ABC si troverà diviso in tre triangoli uguali BAD, DAE, EAC. Tiro la retta OA, e da' punti D, E tiro le rette DR, ES parallele ad OA; finalmente, dal punto O tiro le rette OR, OS, che dividono 'l triangolo ABC in tre parti uguali.

Imperocchè i triangoli RDA, RDO, che han la base comune

ne RD, e che sono fra le parallele RD, AO, son' uguali (N. 374.) onde a ciascuno d'essi aggiugnendo la parte comune RBD, avremo il triangolo DAB uguale al triangolo ORB: ma DAB è'l terzo del triangolo ABC; dunque ORB n'è parimente il terzo.

Così pure i triangoli ESA, ESO, che han la base comune ES, e che sono fra le parallele AO, SE, son' uguali; e però, aggiugnendo la parte comune SEC, i triangoli ACE, OSC sono uguali: ma AEC è'l terzo del triangolo ABC; dunque OSC n'è altresì'l terzo, e per conseguenza il quadrilatero ROSA è'l terzo rimanente.

Se vogliamo, che le tre parti sieno fra loro come le parti HP, PQ, QT della retta HT, divido la retta BC nella medesima ragione di HT, e termino l'operazione come sopra.

429. PROBLEMA. *Dividere un triangolo ABC ( Fig. 274.) in qualsivoglia numero di parti uguali, o disuguali col mezzo delle linee parallele alla base AC.*

Se vogliamo, ch'ei sia diviso in tre parti uguali, divido in tre ugualmente il lato AB ne' punti E, R; prendo una media proporzionale BH fra la retta BA e'l suo terzo BE, e tiro HM parallela alla base. Piglio ancora una media proporzionale BN fra la retta BA e i suoi due terzi BR, e tirando la retta NP parallela alla base, il triangolo ABC trovasi diviso in tre parti uguali dalle parallele HM, NP.

Poichè, i triangoli simili BHM, BAC sono fra loro come i quadri de' loro lati omologhi BH, BA ( N. 392. ): ora per la costruzione noi abbiamo BE. BH : BH. BA. Dunque  $\overline{BE} \cdot \overline{BH} : : BE. BA : : 1. 3$  ( N. 393. ); e per conseguenza il triangolo BHM è'l terzo del triangolo BAC. Così ancora si proverà, ch'il triangolo BNP è i due terzi del triangolo BAC; donde ne segue, che da questo levando'l triangolo BHM, il residuo HMNP farà parimente'l terzo del triangolo, e però il trapezoide NPCA sarà'l terzo rimanente.

Se vogliamo, ch'il triangolo sia diviso in tre parti, le quali sieno fra loro come le tre SQ, QT, TV della retta SV, divido'l lato BA nella medesima ragione di SV, e termino l'operazione come sopra.

430. PROBLEMA. *Dividere un triangolo ABC ( Fig. 275. ) in qualsivoglia numero di parti uguali, o disuguali col mezzo delle linee, che partono da un medesimo punto nell' area, che non è dato.*

Se



Se vogliamo, ch' il triangolo sia diviso in quattro parti uguali, piglio AR uguale alla quarta parte della base; dal punto R tiro la retta RV parallela al lato AB; divido per mezzo RV in O, e tirando le rette OA, OB, il triangolo OAB è l' quarto del triangolo ABC; poichè, tirando la retta RB, i triangoli ABO, ABR, che han la base comune AB e che sono fra le parallele AB, RV, sono uguali: ma ABR è l' quarto del triangolo ABC, poichè entrambi hanno la medesima altezza, e poichè la base AR è l' quarto della base AC; dunque il triangolo ABO è altresì l' quarto del triangolo ABC.

Ora, il trapezoide rimanente AOBC si è li tre quarti del triangolo ABC, ed in conseguenza e' conviene dividerlo in tre parti uguali. Ma in questo trapezoide i triangoli ROC, VOC, i quali hanno le basi RO, VO uguali per la costruzione, e la medesima altezza, poichè hanno l' vertice in C, sono uguali; ed i triangoli AOR, BOV, i quali hanno parimente le basi uguali, e sono fra le parallele AB, RV, sono altresì uguali; onde i triangoli AOC, BOC sono fra loro uguali; perciò, dividendo in tre parti ognuna delle lor basi, e da' punti di divisione tirando delle rette al punto O, abbiamo sei parti uguali, che prese due a due ce ne danno tre AOS, SOTC, BOT, ciascuna delle quali è l' quarto del triangolo ABC.

Se vogliamo, ch' il triangolo sia diviso in quattro parti, le quali sieno fra loro come le parti MN, NP, PQ, OX della retta MX; sopra la base AC prendo una parte AR, tal che s' abbia  $AR : AC :: MN : NX$ , e terminando il resto come sopra, il triangolo ABO è al triangolo totale ABC; come MN è ad MX; e resta solo a dividere il trapezoide AOBC, in tre parti che sieno fra loro come l'altre NP, PQ, QX della retta MX, col mezzo del punto O preso sopra l' suo circuito; ciò che noi insegneremo nel seguente Problema.

431. PROBLEMA. *Dividere qualsivoglia Figura ABCDE ( Fig. 276. ) in qualunque numero di parti uguali, o disuguali col mezzo delle linee tirate dal punto O preso sul circuito.*

Se vogliamo, che la Figura sia divisa in tre parti uguali, dal punto O tiro a ciascun' angolo le rette OA, OB, OC, che la dividono in triangoli; cangio questi in altri triangoli PMQ, QMR, RMS, SMT, che lor sieno uguali ciascuno a ciascuno, e ch' abbiano la medesima altezza, cioè  $PMQ = AEO$ ,  $QMR = AOB$ , e così di seguito; e per conseguente l' triangolo totale PMT equivale alla Figura ABCDE. Di-

Divido in treugualmente la base PT ne'punti N, L, e quindi al vertice M tiro le rette NM, LM, che dividono'l triangolo PMT in altritre PMN, NML, LMT fra loro uguali, a cagione delle basi uguali, e dell'altezza comune.

Ora, cadendo il punto N del terzo PN sopra la base QR del triangolo QMR = AOB, divido la base AB del triangolo AOB in X nella medesima ragione che in N lo è la base QR, e tirando la retta XO, il triangolo AOX è al triangolo AOB, come la base AX è alla base AB: ma QMN è al triangolo QMR, come QN è a QR, o come AX è ad AB; dunque AXO. AOB :: QMN. QMR, e a motivo di AOB = QMR abbiamo AXO = QMN: ora EOA = PMQ; onde EOA + AOX = PMQ + QMN, od EOXA = PMN: ma PMN è'l terzo del triangolo PMT uguale alla Figura ABCDE; perciò EOXA è'l terzo di detta Figura.

Così pure, acciocchè'l punto L della seconda divisione uguale NL cada sulla base RS del triangolo RMS uguale al triangolo BOC, divido la base BC di detto triangolo in Z nella medesima ragione, in cui la base RS lo è in L, e tirando la retta OZ, la parte XOZB è altresì un terzo della Figura; imperocchè, a cagione di AOB = QMR, e di AOX = QMN, abbiamo XOZ = NMR: ora BOZ. BOC :: BZ. BC :: RL. RS, ed RML. RMS :: RL. RS; onde BOZ. BOC :: RML. RMS; e a motivo di BOC = RMS abbiamo BOX = RML, ed in conseguenza XOZ + BOZ = NMR + RML, ovvero XOZB = NML: ma NML è'l terzo del triangolo PMT uguale alla Figura ABCDE. Dunque XOZB n'è altresì'l terzo, e per conseguenza OZCD è'l terzo rimanente.

Se vogliamo, che la Figura sia divisa in ragione di tre linee disuguali, dividasi la base PT nella medesima ragione, e si cominci ad operar come sopra.

432. AVVERTIMENTO. Quindi chiaramente scorgesi, che con egual facilità dividesi in ragion data una Figura in parti così uguali come disuguali; perciò parleremo soltanto della divisione delle Figure in parti uguali.

433. PROBLEMA. Data una Figura ABCD ( Fig. 277. ) dividerla in qualsivoglia numero di parti uguali col mezzo d'un punto O dato nell' area.

Da O tiro a ciascun'angolo le rette OA, OB, OC, OD, che dividono la Figura in triangoli. Riduco questi in altri triangoli

Tomo II.

G

MEN,

MEN, NEP, PEQ, QER, che lor sieno uguali ciascuno a ciascuno, e ch'abbiano una medesima altezza, cioè  $MEN = AOD$ ,  $NEP = AOB$ ,  $PEQ = BOC$  e  $QER = COD$ ; ed in conseguenza l'intero triangolo MER è uguale alla Figura ABCD.

Se dunque vogliamo dividere la Figura in tre parti uguali; divido in tre ugualmente la base MR ne' punti H, L, da cui al vertice tiro le rette HE, LE, che dividono 'l triangolo MER in tre triangoli MEH, HEL, LER fra loro uguali, e di cui per conseguenza ciascuno è 'l terzo del triangolo MER; o della Figura ABCD: così, poichè il punto H del terzo MH cade sulla base NP del triangolo NEP uguale al triangolo AOB, divido la base AB di detto triangolo in X nella medesima ragione, in cui NP lo è in H, e tirando la retta XO, la parte DOXA è 'l terzo della Figura; il che si dimostrerà come nel precedente Problema. Così pure, cadendo il punto L della seconda divisione uguale HL sopra la base PQ del triangolo PEQ uguale al triangolo BOC, divido la base BC di questo triangolo in Z nella stessa ragione, in cui la base PQ lo è in L; e tirando ZO, la parte XOZB è altresì 'l terzo della Figura, ed in conseguenza l'altro terzo si è la parte DOZC.

434. COROLLARIO. Dello stesso metodo ci serviremo, quando avrassi a dividere un triangolo per un punto dato nell'area; imperocchè conviene riflettere, che nel Problema del numero 430 il punto nell'area non era dato, e che anzi trattavasi di ritrovarlo, quando in questo dobbiamo necessariamente astignerci al dato punto.

435. PROBLEMA. *Dividere un trapezoide ABCD (Fig. 278.) in qualsivoglia numero di parti uguali.*

Se vogliamo, ch'ei sia diviso in quattro ugualmente; dividasi la base inferiore AB in quattro parti uguali ne' punti M, N, R, dividasi pure la base superior DC in quattro ugualmente ne' punti S, T, X, e da' punti di divisione tirando le rette MS, NT, RX, il trapezoide è diviso in quattro altri trapezoidi uguali.

Poichè, il trapezoide ADSM è uguale al prodotto della somma delle sue due basi AM, DS per la metà della sua altezza (N. 386.) ora, gli altri tre trapezoidi hanno la medesima altezza e le basi uguali alle due AM, DS; essi son dunque uguali allo stesso prodotto.

436. PROBLEMA. *Dividere un trapezoide ABCD (Fig. 280.) col mezzo delle linee parallele alla sua base.*

Pro-

Prolungo i lati non paralleli AD, CB finchè concorrano in E; riduco'l trapezoide in un triangolo MNP, che sia ad effo uguale, e'l triangolo DEC in un'altro PNS, che li sia pure uguale, e che abbia la medesima altezza del triangolo MNP: così 'l trapezoide ABCD è al triangolo DCE, come il triangolo MNP è al triangolo PNS, o come la base MP alla base PS, poichè i due triangoli hanno l'istessa altezza.

Se dunque vogliamo, ch'il trapezoide sia diviso in tre parti uguali, divido la base MP in tre ugualmente ne' punti Q, R, da cui tiro le rette QN, RN, che dividono'l triangolo MNP in tre parti uguali; infra SP ed SR piglio una media proporzionale SO, quindi una quarta proporzionale EL alle tre linee SP, SO, ED; e dal punto L tirando LH parallela alla base AB, la parte LHCD è'l terzo del trapezoide.

Poichè, simili essendo i triangoli EDC, ELH, effi son fra lor come i quadri  $\overline{ED}$ ,  $\overline{EL}$  de' loro lati omologhi: ora, noi abbiamo per la costruzione  $ED : EL :: SP : SO$ ; dunque  $\overline{ED} . \overline{EL} :: SP . SO$ : ma noi abbiamo altresì  $SP : SO :: SO : SR$ ; onde  $\overline{SP} . \overline{SO} :: SP . SB$  (N. 393.), e per conseguente  $EDC . ELC :: SP . SR :: SNP . SNR$ ; e dividendo  $EDC . ELC - EDC :: SNP . SNR - SNP$ , o  $EDC . LHCD :: SNP . RNP$ : ma  $EDC = SNP$ ; dunque  $LHCD = RNP$ , cioè la parte LHCD equivale al triangolo RNP, ch'è il terzo del triangolo MNP, ovvero del trapezoide ABCD.

Piglio parimente una media proporzionale SZ infra SP ed SQ, quindi una quarta proporzionale ET alle quattro linee SP, SZ, ED; e tirando TV parallela alla base, la parte TVDC sarà i due terzi del trapezoide ABCD; ciò che prova si come sopra. Dunque levando la parte LHCD, che n'è pure il terzo, il residuo TVHL è'l terzo, ed in conseguenza ABVT sarà il terzo rimanente.

437. PROBLEMA. *Da un triangolo ABC ( Fig. 279. ) levare un triangolo uguale al dato DEF.*

Cerco un triangolo HCL uguale al triangolo DEF e simile al triangolo ABC ( N. 414. ), e sottraendo l'uno dall'altro il residuo è ABLH.

## Delle Figure Isoperimetre.

438. Due, o più figure, le quali hanno i perimetri, o circuiti uguali, diconsi *Isoperimetre*.

439. PROBLEMA. *Data una figura farne un'altra di diversa spezie, che le sia isoperimetro.*

Supponiamo, che s'abbia a fare un rettangolo isoperimetro al triangolo ABC ( Fig. 281. ) : congiungo i lati del triangolo in modo che formino la retta EL ; divido per mezzo questa linea in G, e poi ciascuna metà in due parti disuguali, facendo  $EF = HL$  ed  $FG = GH$ ; finalmente prendo le due uguali EF, HL per formare le due basi superiore ed inferior d'un rettangolo MO, e le due FG, GH per formarne i lati: così 'l rettangolo MO è isoperimetro al triangolo APC.

440. COROLLARIO. Quindi chiaramente scorgefi, che nello stesso modo far si potrebbe un quadro, un poligono regolare, ec. isoperimetro al triangolo ABC.

441. PROBLEMA. *Dato un triangolo scaleno ABC (Fig. 283.) sopra la medesima base AB costruire un triangolo isoscele isoperimetro al triangolo ABC.*

Piglio AD uguale alla metà de' due lati AC, CB, e sopra la base AB faccio un triangolo ADB, i cui lati AD, BD sieno uguali.

442. PROPOSIZIONE XCVIII. *Fra tutt' i triangoli isoperimetri costruiti sopra una stessa base, l' isoscele è maggiore di quei, ch' isosceli non sono; e gli altri son tanto minori, quanto più sono disuguali i loro lati.*

Sia ABC ( Fig. 284. ) il triangolo isoscele sopra la base AB, ed ABE il triangolo isoperimetro ad ABC, ma non isoscele sopra la base. Prolungo AC in R, facendo  $AC = CR$ , e tiro la retta ER; nel triangolo AER i due lati AE, ER pres' insieme son maggiori di AR, o di AC, CB, o finalmente di  $AE + EB = AC + CB$ , poichè isoperimetri sono i due triangoli ACB, AEB, ed hanno la medesima base: così abbiamo  $AE + ER > AE + EB$ ; e d' ambe le parti levando AE, abbiamo ER maggiore di EB. Ora, i triangoli BCE, ECR hanno il lato CE comune, e'l lato BC uguale al lato CR: ma la base BE è minore della base ER, come s'è veduto; dunque l'angolo BCE è minor dell' angolo ECR ( N. 108. ), e per conseguenza minore della metà dell'

angolo RCB: ma l'angolo RCB esterno al triangolo ABC equivale a due interni opposti A ed ABC, che sono uguali, egli è doppio dell'angolo ABC; e tirando la retta CS parallela ad AB, l'angolo SCB equivale al suo alterno ABC, e vale in conseguenza la metà dell'angolo RCB; onde BCE è minor dell'angolo SGB, e conseguentemente l' vertice E del triangolo ABE cade sotto la parallela CS; così l'altezza del triangolo isoscele ACB è maggiore che quella del triangolo AEB: ma poichè questi due triangoli han la stessa base AB, sono fra essi come la loro altezza; il triangolo ACB è dunque maggiore del triangolo AEB.

Proveremo altresì, ch' il triangolo AFB, il qual' è isoperimetro al triangolo AEB, ma che ha i lati AF, FB più disuguali fra loro de' lati AE, EB, è minore del triangolo AEB, e così degli altri.

443. COROLLARIO. *Se due triangoli isosceli ed isoperimetri ABC, AEC ( Fig. 285. ) hanno un lato AC comune, quello ch' è isoscele sopra detto lato, cioè il triangolo ABC, il quale ha i suoi due angoli uguali sopra AC, è maggiore di quello, ch' isoscele non è sopra detto lato, cioè del triangolo AEC, che ha i suoi angoli uguali sopra CE, e non sopra AC.*

Ciò dimostrasi come sopra; poichè il triangolo AEC considerato per rapporto alla sua base AC è scaleno, mercè che disuguali sono i lati AE, EC, dove all' opposto il triangolo ABC considerato per rapporto alla stessa base è isoscele.

444. PROPOSIZIONE XCIX. *Se due triangoli isoperimetri ed isosceli AEC, ABC ( Fig. 285. ) hanno un lato comune AC, quello, di cui è minore la differenza della base a ciascuno de' suoi lati uguali, è più grande di quello, la cui differenza della base a ciascuno de' suoi lati uguali è maggiore.*

Sia il triangolo isoscele ACE, i cui lati uguali sono AE, AC, e la cui base si è EC, che noi supporrem maggiore del lato AE, od AC: se sopra AC far si volesse un triangolo isoperimetro al triangolo AEC, ed isoscele sopra AC, converrebbe de' due lati disuguali AE, EC farne due uguali AB, BC, e perciò prender la metà dell' eccello di EC sopra AE, ed aggiugnerlo ad AC: così nel nuovo triangolo ABC il lato AB, o BC sarà maggiore di AC della metà dell' eccello di CE sopra AE, od AC; e conseguentemente la differenza della base AC di questo nuovo triangolo al suo lato BC, o BA sarà minore di quello sia nel triangolo ACE la differenza della base CE al lato AC: ora, isoscele ef-

fen-

sendo l' nuovo triangolo  $ABG$  sopra 'l lato comune  $AG$ , egli è maggiore del triangolo  $AEG$ , ch' isoscele non è su questo lato; dunque, ec.

Se nel triangolo  $AEC$  la base  $EC$  fosse minore del lato  $AE$ , ed  $AG$ , si proverebbe agevolmente lo stesso.

**445. PROPOSIZIONE C.** *L' equilatero è 'l maggiore di tutt' i triangoli isoperimetri.*

Sia 'l triangolo scaleno  $ABC$  ( *Fig. 286.* ) : sopra la sua base  $AB$  faccio un triangolo  $ADB$  isoscele, ed isoperimetro ad  $ABC$ ; e però  $ADB$  è maggiore di  $ACB$  ( *N. 442.* ). Sul lato  $AD$  del triangolo isoscele  $ADB$  faccio un triangolo isoperimetro ed isoscele  $DEA$ , il quale, isoscele essendo sopra  $DA$ , è maggiore di  $ADB$ , che sopra lo stesso  $DA$  non è isoscele ( *N. 443.* ); e la differenza della sua base  $AD$  a' suoi lati  $AE$ ,  $DE$  è minore di quello sia nel triangolo  $ADB$  la differenza della base  $AB$  a' suoi lati  $AD$ ,  $DB$  ( *N. 444.* ). Sopra  $ED$  faccio parimente un triangolo  $EOD$  isoscele, e isoperimetro al triangolo  $DEA$ ; così quest'ultimo triangolo  $EDO$  è maggiore del triangolo  $DEA$ , e la differenza della sua base a' suoi lati è minore; poichè dunque, a misura che la differenza della base a' suoi lati va diminuendo, sempre maggiore diventa 'l triangolo isoperimetro, ne segue, che quando nulla sarà questa differenza; cioè quando 'l triangolo isoperimetro sarà equilatero, egli sarà 'l maggiore di tutti gl' isoperimetri.

Se prendesi un' altro triangolo scaleno isoperimetro al triangolo  $ACB$  ma di base differente, e che si faccia lo stesso raziocinio, troveremo, ch' il triangolo equilatero isoperimetro a detto triangolo sarà 'l maggiore: ora, e' non può trovarsi ch' un sol triangolo equilatero isoperimetro a più isoperimetri; egli è dunque generalmente vero, che l' equilatero è 'l maggiore di tutt' i triangoli isoperimetri, che hanno basi uguali, o disuguali.

**446. PROPOSIZIONE CI.** *Il maggiore di tutti i parallelogrammi isoperimetri, che hanno l' istessa base  $AB$  ( *Fig. 287.* ), si è 'l rettangolo  $ADCB$ ; e gli altri son tanto minori, quanto più acuti son i loro angoli.*

Preso per centro 'l punto  $A$ , col raggio  $AD$  descrivo un semicircolo  $MDN$ ; e dallo stesso punto tirando 'l raggio  $AE$  ad un punto della circonferenza  $E$  differente da  $D$ , termino 'l parallelogrammo  $AEGB$  isoperimetro al rettangolo  $ADCB$  per esser comune la base  $AB$  e per essere il lato  $AE$  uguale al lato  $AD$ , mero cè che son raggi d' un' istesso circolo. Ora,  $D$  essendo 'l punto della

della circonferenza il più distante dal diametro MN, l'altezza AD del rettangolo ADCB è maggiore dell'altezza EF del parallelogrammo AEGB; il rettangolo è dunque maggiore del parallelogrammo, imperocchè avendo queste figure la stessa base sono fra lor come le loro altezze.

Se sopra la circonferenza prendesi un punto H più distante da D ch' il punto E, e che tirato'l raggio AH si termini'l parallelogrammo AHLB, si mostrerà facilmente, esser questo minore del parallelogrammo AEGB; e così degli altri.

447. PROPOSIZIONE CII. *Il maggiore di tutt' i rettangoli isoperimetri si è'l quadrato ABCD ( Fig. 288. ), e gli altri sono tanto minori, quanto più son disuguali i loro lati.*

Dall'altezza AB levo la parte BR; alla base AD aggiugno la parte AE uguale a BR; e terminando'l rettangolo EFHD, il quadrato ABCD è isoperimetro al rettangolo EFHD, che ha guadagnato sopra la lunghezza della base, ciò che ha perduto sopra l'altezza. Ora, uguali essendo le basi BR, EA de' rettangoli BRHC, EARF, detti rettangoli sono fra essi come le loro altezze RH, AR, ed RH è maggior di AR; onde'l rettangolo BRHC è maggiore del rettangolo EARF, ed aggiugnendo la parte comune ARHD, abbiamo ABCD maggiore di EFHD; il che doveasi 1.<sup>o</sup> dimostrare.

Dall'altezza AR, od EF del rettangolo EFGD levo una parte FN, ed alla sua base ED aggiugno una parte ES uguale ad FN: così terminando'l rettangolo STVD, egli sarà isoperimetro al rettangolo EFHD. Ora, uguali essendo le basi FN, SE de' rettangoli FNHV, TNES, essi sono fra lor come le loro altezze FH, EN, ed FH è maggiore di EN; dunque'l rettangolo FNHV è maggiore del rettangolo TNES; e a ciascuno di essi aggiugnendo la parte comune ENVD, il rettangolo EFHD è maggiore del rettangolo STVD, i cui lati son più disuguali. Il che doveasi 2.<sup>o</sup> dimostrare.

448. PROPOSIZIONE CIII. *Se due triangoli rettangoli ABC, RCD sono simili ( Fig. 289. ); dico, ch' il quadrato d' una linea composta delle due ipotenuse BC, CD equivale al quadro d' una linea composta de' due lati omologhi AB, CR, più al quadrato d' un'altra linea composta degli altri due lati omologhi AC, RD.*

Congiungo in diritto l'ipotenuse BC, CD, e a motivo dell'angolo ABC, uguale all'angolo RCD, parallele sono le linee AB, RC non meno che le linee AC, RD, a cagione degli angoli ugua-

li



li ACB, RDC. Prolungo BA fino al concorso di DR prolungato in P: così le rette AC, PR parallele fra le parallele BP, CR son' uguali; e per la stessa ragione lo sono ancora le rette

AP, CR, e'l triangolo BPD è rettangolo; dunque  $\overline{BD} = \overline{BP}$

+  $\overline{PD}$ , cioè'l quadrato della linea BD uguale alle due ipotenuse equivale al quadro della linea BP, o BA + RC, più'l quadro della linea PD, od RD + AC.

449. PROBLEMA. *Dati due triangoli isosceli ABC, CDE di basi disuguali, e dissimili fra loro (Fig. 290.) costruire sopra le medesime basi due altri triangoli isosceli e simili fra loro AHC, CRE, i cui quattro lati AH, HC, CR, RE presi insieme equivagliano ai quattro AB, BC, CD, DE de' dati triangoli presi altresì insieme.*

Congiungo in diritto i lati AB, CD de' dati triangoli; in S divido la somma MN nella stessa ragione che la somma AE delle loro basi lo è in C; piglio due rette uguali ciascuna alla parte maggiore MS, e con esse e colla base maggiore AC costruisco un triangolo isoscele AHC. Prendo pure due linee uguali ciascuna alla parte minore SN, e con queste due linee e la base minor CE costruisco un triangolo isoscele CRE: così i due triangoli isosceli AHC, CRE son simili, poichè abbiamo AH . CR : : MS. SN : : AC. CE; e di più i lor quattro lati presi insieme equivagliano ai quattro de' dati triangoli, imperocchè abbiamo AH + CR = MS + SN = MN = AB + CD.

450. PROPOSIZIONE CIV. *Dati due triangoli isosceli ABC, CDE dissimili sopra basi uguali, o disuguali AC, CE (Fig. 291.), se sopra le stesse si costruiscono due triangoli isosceli AHC, CRE simili fra loro, ed i cui quattro lati AH, HC, CR, RE sieno insieme uguali ai quattro AB, BC, CD, DE de' dati triangoli; dico, ch' i due triangoli simili AHC, CRE presi insieme faranno maggiori de' due ABC, CDE presi altresì insieme.*

Da' vertici H, D abbasso le perpendicolari HP, DQ, che passeranno per gli altri vertici B, R, poichè isosceli sono i quattro triangoli sopra le basi AC, CE; prolungo la perpendicolare DQ del maggiore de' due dati triangoli facendo QL = DQ; dal vertice B dell'altro triangolo dato tiro la retta BL, e dal punto L la retta LC. Così, avendo i due triangoli rettangoli CQD, CQL il lato CQ comune, e'l lato DQ uguale a QL, sono perfettamente uguali, e per conseguenza noi abbiamo LC = CD, e BC + CL = BC

+

+  $\overline{CD} = \overline{HC} + \overline{CR}$ . Ora nel triangolo BCL essendo i due lati BC, CL presi insieme maggiori del lato BL, il quadrato d'una linea composta de' due BC, CL, o de' due HC, CR è dunque maggiore del quadro BL, e conseguentemente abbiamo  $\overline{HC} + \overline{CR} > \overline{BL}$ .

Simili essendo i triangoli rettangoli HPG, RQG, a motivo dell'angolo acuto HCP uguale all'angolo acuto RCQ, il quadrato d'una linea composta delle loro ipotenuse HC, CR equivale al quadro d'una linea composta de' due lati HP, RQ, più 'l quadrato della linea PQ composta degli altri due lati PC, CQ (N. 448.); perciò noi abbiamo  $\overline{HC} + \overline{CR} = \overline{HP} + \overline{RQ} + \overline{PQ}$ .

Così pure, simili essendo i triangoli rettangoli PBS, SLQ, il quadro della linea BR composta delle due ipotenuse BS, SL equivale al quadro di una linea composta de' due lati BP, QL, o QD, più 'l quadro della linea PQ composta degli altri due PC, CQ, e per conseguenza  $\overline{BL} = \overline{BP} + \overline{QD} + \overline{PQ}$ : ora noi abbiamo ritrovato  $\overline{BL}$  minore di  $\overline{HC} + \overline{CR}$ ; dunque  $\overline{BP} + \overline{QD} + \overline{PQ}$  è minore di  $\overline{HC} + \overline{CR}$ , o del suo uguale  $\overline{HP} + \overline{RQ} + \overline{PQ}$ ; onde, levando  $\overline{PQ}$  d'ambe le parti, avremo  $\overline{BP} + \overline{QD}$

minore di  $\overline{HP} + \overline{RQ}$ ; però, dall'una e dall'altra parte estraendo la radice quadra, avremo  $\overline{BP} + \overline{QD}$  minore di  $\overline{HP} + \overline{RQ}$ , cioè l'altezze de' due triangoli dissimili sono insieme minori dell'altezze de' due triangoli simili; donde n'avviene, che l'eccesso HB dell'altezza HP del triangolo AHC sopra l'altezza BP del triangolo ABC è più grande dell'eccesso DR dell'altezza DQ del triangolo CDE sopra l'altezza RQ del triangolo CRE. Ciò posto.

Il triangolo ABC è  $\frac{1}{2}AC \times PB$ , il triangolo CDE è  $\frac{1}{2}CE \times DQ$  (N. 375.), e la lor somma è  $\frac{1}{2}AC \times PB + \frac{1}{2}CE \times DQ$ :

per l'opposto, il triangolo AHC è  $\frac{1}{2}AC \times PB + BH$ , il triangolo CRE è  $\frac{1}{2}CE \times QD - DR$ , e la lor somma è  $\frac{1}{2}AC \times PB + BH$

+  $\frac{1}{2}EC \times QD - DR$ ; onde, paragonando questa alla precedente somma  $\frac{1}{2}AC \times PB + \frac{1}{2}CE \times DQ$ , egli è facile vedere, ch' il triangolo AHC guadagna sopra 'l triangolo ABC una quan-

tità  $\frac{1}{2}AC \times BH$  maggiore della quantità  $\frac{1}{2}EC \times DR$ , cui 'l triangolo CRE perde per rapporto al triangolo CDE, poichè  $\frac{1}{2}AC$  è maggiore di  $\frac{1}{2}CE$ , e BH di DR; dunque i due triangoli simili AHC, CRE pres' insieme son maggiori dei dissimili ABC, CDE.

451. PROPOSIZIONE CV. *La massima fra tutte le Figure isoperimetre d'uno stesso numero di lati si è l'equilatera, e l'equiangola.*

Sia la Figura di cinque lati ABCDE (Fig. 292.) non equilatera, i cui lati disuguali sono EA, AB; tiro la retta EB, e sopra questa base faccio un triangolo isoscele ERB, i cui due lati ER, RB pres' insieme sieno uguali ai lati EA, AB presi altresì insieme: così 'l triangolo ERB è maggior del triangolo EAB (N. 242.); ed aggiugnendo la parte comune EDCB, la Figura REDCB è maggiore della Figura AEDCB. Dunque la Figura irregolare ne' suoi lati non è la maggior delle Figure isoperimetre d'uno stesso numero di lati.

Sia dunque la Figura ABCDE (Fig. 293.) regolare ne' suoi lati, ma con angoli disuguali EDC, EAB; tiro le rette EC, EB, e sopra le stesse prese per basi facendovi due triangoli isosceli simili ERC, EHB, i cui quattro lati sieno insieme uguali a' quattro lati de' triangoli EDC, EAB, i due ERC, EHB sono insieme maggiori dei due EDC, EAB (N. 450.); e ad ambe le parti aggiugnendo la parte comune EBC, la Figura ERCH è maggior della figura EDCBA. Dunque la Figura irregolare ne' suoi angoli non è la maggiore delle Figure isoperimetre d'un medesimo numero di lati.

Ora, fra tutte le figure isoperimetre d'un'istesso numero di lati, necessariamente conviene, ch'una ve ne sia di più grande, mercè che non può un dato perimetro chiudere uno spazio, che sempre divenga maggiore; ed abbiamo già trovato, che tutte quelle, che regolari non sono, esser non potrebbero le maggiori; dunque la Figura regolare ne' suoi lati e ne' suoi angoli è la maggior di tutte.

452. PROPOSIZIONE CVI. *Se dato un'angolo retto ABC (Fig. 294.) dividesi l'uno de' suoi lati BA in parti uguali BD, DE, EF, ec. e che da ciascun punto di divisione si tirino delle rette DC, EC, FC, ec. a qualsivoglia punto C dell'altro lato BC; io dico, che gli angoli DCB, ECB, FCB, ec. andran diminuendo, o misura che si allontaneranno dal primo DCB.*

Preso per centro 'l punto C, coll'intervallo CD descrivo un'arco di circolo, che seghi le linee vicine a CD, l'una in R, e l'altra

altra in  $H$ : così, essendo l'inclinata  $CD$  maggior della perpendicolare  $CB$ , ho  $CH = CD$  maggiore di  $CB$ ; ed essendo l'obliqua  $CE$  maggior dell'obliqua  $CD$ , ch'è più vicina alla perpendicolare  $CB$ , ho  $CR = CD$  minore di  $CE$ : ora, comune essendo l'altezza  $CB$ , ed uguali le basi  $DB$ ,  $DE$  de' triangoli  $CDB$ ,  $CED$ , essi sono fra loro uguali, e l'angolo  $CDH$  è maggior del triangolo  $CDB$ , là dove l'angolo  $CRD$  è minor del triangolo  $CED$ ; dunque il settore  $CDH$  è maggior del settore  $CRD$ : ma questi due settori sono come i loro archi  $DH$ ,  $DR$ , o come gli angoli  $DCH$ ,  $DCR$ , che vengon misurati da questi archi; onde l'angolo  $DCH$  è maggior dell'angolo  $DCR$ ; e nello stesso modo si proverà, che l'angolo  $FCE$  è minor dell'angolo  $ECD$ .

453. COROLLARIO. Dunque gli angoli  $DCB$ ,  $ECD$ ,  $FCE$ , ec. non sono in ragione delle basi  $DB$ ,  $ED$ ,  $FE$ , ec. de' triangoli  $DCB$ ,  $ECD$ , ec.

Imperocchè queste basi sono uguali, e gli angoli all'opposto van diminuendo.

454. PROPOSIZIONE CVII. Se due poligoni regolari  $ABCDE$ ,  $FGHLMN$  ( Fig. 295. ) di differenti specie sono isoperimetri; il lato  $AB$  del primo è al lato  $FG$  del secondo, reciprocamente come il numero de' lati del secondo è al numero de' lati del primo; e l'angolo al centro  $AOP$  è all'angolo al centro  $FPG$ , nella stessa ragione ch' il lato  $AB$  è al lato  $FG$ , cioè ancora reciprocamente come il numero de' lati del secondo al numero de' lati del primo.

Il lato  $AB$  è la quinta parte del perimetro  $ABCDE$ , e l'angolo  $FG$  n'è la sesta del perimetro  $FGHLMN$ : ma questi due perimetri sono uguali; dunque  $AB$  è ad  $FG$ , come  $\frac{1}{5}$  è ad  $\frac{1}{6}$ ; e riducendo queste frazioni allo stesso denominatore, il che ci darà  $\frac{6}{30}$  e  $\frac{5}{30}$ , avremo  $AB$  ad  $FG$  come  $\frac{6}{30}$  a  $\frac{5}{30}$ , o come 6 a 5, cioè come il numero 6 de' lati del secondo è al numero 5 de' lati del primo.

Parimente, perchè tutti gli angoli al centro d'un poligono equivagliono a quattro retti, l'angolo al centro  $AOB$  è la quinta parte di quattro retti, e l'angolo al centro  $FPG$  n'è la sesta; onde questi due angoli sono fra loro, come  $\frac{1}{5}$  è ad  $\frac{1}{6}$ , o come  $\frac{6}{30}$  a  $\frac{5}{30}$ , o pure come 6 a 5, ed in conseguenza nella stessa ragione di  $AB$  ad  $FG$ , ovvero del numero degli angoli del poligono  $FGHLM$  al numero di quelli del poligono  $ABCDE$ .

455. PROPOSIZIONE CVIII. Dati due Poligoni regolari isoperimetri, ma di differenti numeri di lati, il massimo è quello, che ha un numero di lati maggiore.

Sia l' pentagono regolare ABCDE ( *Fig. 296.* ) isoperimetro all' esagono regolare FGNTVM; il lato AB del pentagono è dunque al lato FG dell' esagono come 6 a 5 ( *N. 454.* ), e conseguentemente, se'l lato AB è diviso in 6 parti uguali, il lato FG ne conterrà cinque. Prendo la metà d'una di queste parti, ch'io porto da A in H, poi l'altra metà, ch'io porto da B in L, e tiro le linee HO, LO, e l'apotema OQ: così, poichè AB contiene 6 parti uguali, e doppie ciascuna della parte AH, la linea AQ, ch'è la metà di AB, conterrà 6 metà di queste parti uguali, cioè 6 parti uguali ad AH; se dunque si concepisce, che AQ sia divisa in queste 6 parti uguali, e che da ciascun punto sieno tirate delle rette al punto O, il triangolo AOQ sarà diviso in 6 triangoletti uguali ciascuno al triangolo AOH: ma siccome gli angoli al vertice O di questi sei triangoli andran diminuendo, a misura che le lor basi s'allontaneranno da OQ ( *N. 452.* ), così l'angolo AOH sarà minore della sesta parte dell'angolo AOQ. Per la medesima ragione, l'angolo BOL uguale ad AOH sarà altresì minore della sesta parte di QOL; perciò l'angolo HOL sarà maggiore dei cinque sesti dell'angolo AOB, cioè HOL sarà maggiore rapporto all'angolo AOB di quello sia 5 rapporto a 6. Ora FRG è all'angolo AOB, come 5 a 6; onde l'angolo HOE sarà maggiore di FRG, ed in conseguenza nel triangolo isoscele HOL i due angoli sopra la base OHL, OLH saran minori dei due RFG, RGF sopra la base del triangolo isoscele RFG. Facendo dunque sopra FG due angoli SFG, SGF uguali ai due OHL, OLH, egli è per se evidente, ch'essendo i due lati FS, SG più inclinati sopra la base che i due FR, GR, si segheranno in un punto S più vicino alla base ch' il punto R, in cui si segano i due FR, GR; e però il triangolo FSG avrà l'altezza SP minore dell'altezza RP del triangolo FRG: ma simili essendo ed uguali i triangoli HOL, FSG, essi hanno l'altezze uguali OQ, SP; dunque OQ è minore di RP. Ora, il pentagono ABCDE equivale al prodotto del suo perimetro moltiplicato per la metà del suo apotema OQ ( *N. 377.* ), e l'esagono FGNTVM al prodotto del suo moltiplicato per la metà del suo apotema; onde, per l'egualità de' due perimetri, questi due poligoni sono fra lor come la metà de' loro apotemi, o come i loro apotemi; e per conseguenza il pentagono è minore dell'esagono, che ha più lati di lui. Lo stesso si proverà rispetto agli altri due poligoni regolari isoperimetri di differenti numeri di lati.

456. COROLLARIO. Essendo'l circolo quello, che fra tutti i Po-

li-

*ligoni regolari contiene un maggior numero di lati , ne segue , ch' egli è l' maggiore di tutt' i Poligoni regolari isoperimetri.*

457. AVVERTIMENTO. Da quanto s'è detto circa le Figure isoperimetre puossi agevolmente conchiudere , che fra tutt' i Magazzini , che si costruiscon nelle Piazze per le munizioni sì da guerra che da bocca , i quadri assai più contengono di quei , che son fatti in quadrato lungo, posto lo stesso perimetro; ed i circolari son quelli , che contengono più di ciascun' altro. In favore di quest' ultimi potremmo eziandio aggiugnere , che la Figura de' loro coperti li preserva molto più di tutti gli altri dall' urto diretto delle Bombe.

## CAPITOLO DECIMO.

*Della Stereometria , o Misura de' Solidi , delle loro Superficie , e de' lor rapporti .*

*Delle differenti posizioni delle Linee riguardo a' Piani , e di quelle de' Piani fra loro.*

458. **D**icesi, ch'una retta linea è sopra un Piano, quando tutte le sue parti sono nello stesso Piano.

459. Se due punti R, S ( Fig. 297. ) d' una retta sono sopra un Piano ABCD, tutte le parti di detta linea, prolungata ancora in infinito, saranno nello stesso piano, prolungato parimente in infinito.

Dal punto R pel punto S tirisi nel piano ABCD la retta RS; il ch' è possibile , poichè le parti di questo piano non sono l' une più , o meno sollevate dell' altre; così detta linea RS avrà tutt' i suoi punti sul piano : ma da R ad S può tirarsi ch' una sola retta; ond' egli è impossibile, ch' un' altra linea, la quale sul piano ABCD ha i punti R, S, abbia alcuni de' suoi punti fra R ed S, i quali non sieno sopra l' medesimo piano; ed è per se manifesto, che se d' ambe le parti si prolunga la retta RS in X e Z, tutt' i punti di detta linea saranno ancora sul piano ABCD, prolungato se sia d' uopo.

460. Le due rette AB, CB, che si segano in B ( Fig. 298. ), sono in un medesimo piano.

Tiro la retta AC, e facendola sempre muover parallela a se stessa

stessa fino in B, lungo la retta AB, ella col suo moto descrive una superficie ACEB: ora, i punti C, B della retta BC sono in questa stessa superficie; onde tutta la linea BC è nel piano ACEB, come lo è pure la linea AB.

461. Dunque le tre linee d'un triangolo ABC sono in un medesimo piano.

462. Una linea, la quale ha uno solo de' suoi punti in un piano prolungato ancora in infinito, è detta perpendicolare sopra esso piano, quando è ugualmente inclinata verso tutt' i lati del medesimo.

463. Se una linea AB ( Fig. 299. ) è perpendicolare sopra due linee TN, SR, che sono in un medesimo piano CDEF, e che si segano in A; dico, che la stessa è perpendicolare al detto piano.

Sopra le linee TN, SR piglio delle parti uguali AS, AT, AR, AN: ora, essendo AB perpendicolare a TN ed SR, le rette BS, BR, BT, BN tirate dal vertice A all'estremità di queste quattro parti faranno fra loro uguali: così, conducendo nel piano le rette ST, NR, i triangoli SBT, NBR faranno fra loro uguali, siccome lo sono anche i triangoli isosceli SAT, NAR, i quali hanno gli angoli al vertice uguali; pel punto A tiro nel piano una retta PQ, che vada a terminare sopra le rette ST, NR; poichè i due triangoli PAT, NAQ hanno l'angolo PTA uguale all'angolo NAQ, che gli è opposto al vertice, l'angolo PTA uguale all'angolo ANQ, a cagione de' due triangoli SAR, NAR isosceli ed uguali, e'l lato TA uguale al lato AN, sono simili, ed eguali; onde  $PT = NQ$ ,  $PA = AQ$ . Parimente, poichè i triangoli PTB, QNB hanno il lato PT uguale al lato NQ, il lato TB uguale al lato NB, e l'angolo contenuto PTB uguale all'angolo contenuto QNB, a cagione de' triangoli isosceli uguali SBT, NBR, son perfettamente uguali. Dunque  $PB = BQ$ ; ed in conseguenza, per essere  $PA = AQ$ , anche la linea AB è perpendicolare sopra PQ. Così ancora proveremo, che AB è altresì perpendicolare a tutte le linee tirate dal punto A; ond' essa è perpendicolare al piano.

464. Da uno stesso punto A ( Fig. 299. ) puossi sopra un medesimo piano alzare una sola perpendicolare AB; perocchè qualunque altra inclinerà necessariamente più dall' uno che dall' altro lato.

465. Se due, o più linee son perpendicolari ad un medesimo piano, elle faranno fra lor parallele.

Sieno le linee AB, EF, CD ( Fig. 300. ) perpendicolari al piano MNOP: Per le loro estremità conduco le rette AE, EC, AC,

AG, e faccio muovere la linea AB sempre parallela a se stessa, lungo la retta AE: ora, siccome in questo moto essa non inclina più dall'uno che dall'altro lato, egli è evidente, che giunta in E sarà parimente perpendicolare al piano, e perciò caderà sopra la EF; perchè altrimenti si potrebbero dal medesimo punto E alzare sopra lo stesso piano due perpendicolari, il che è impossibile ( N. 464. ). Agevol cosa sarebbe eziandio provare, che facendo avanzar la linea EF sempre parallela a se stessa, lungo la retta EC, giunta in C caderà sopra CD, e che facendo muover CD lungo la retta CA, giunta in A caderà sopra AB; dond'egli è facile conchiudere, che le tre linee AB, EF, CD son parallele.

466. *Quindi ne segue, che due linee parallele AB, EF sono in un medesimo piano.*

Perocchè tirando la linea AE, che congiugne le loro estremità, poi facendo muover la linea AB sempre parallela a se stessa lungo la retta AE, giunta in E, posto che sia parallela ad EF, dee cadere sopra EF: ma AB durante questo moto descriverà un piano; dunque EF sarà in detto piano.

467. *Quindi ne segue ancora, che se due, o più linee sono fra lor parallele, e che l'una di esse sia perpendicolare ad un piano, lo saranno anche l'altre.*

468. *Se tre linee uguali AB, CD, EF ( Fig. 301. ) sono perpendicolari ad un piano, e ch' i loro termini A, E, C non sieno in retta linea, il piano, che passerà per i termini superiori B, F, D, sarà parallelo al piano MNOP.*

Nel piano MNOP tiro le rette AE, EC, AC. Perpendicolari essendo al medesimo piano MNOP le linee AB, EF, sono fra lor parallele ( N. 465. ), e poichè son' uguali, sono altresì parallele ed uguali le rette AE, BF: per la stessa ragione lo sono anche le rette EC, FD, non meno che le due AC, BD; essendo dunque i tre lati del triangolo BFD paralleli ciascuno a ciascuno a' tre lati del triangolo AEC, questi due triangoli son paralleli; e in conseguenza il triangolo BFD è parallelo al piano MNOP.

469. *Se una linea AB ( Fig. 302. ) è perpendicolare a due piani MNOP, RHTX, essi son paralleli.*

Nel punto A tiro nel piano MNOP la retta AC, e venendo la retta AB a muoversi sempre parallela a se stessa, lungo la retta AC, è sempre perpendicolare sopra'l piano MNOP, e'l suo termine B descrive una retta BS, su cui anche AB è sempre perpendicolare: ora io dico, che BS dee essere nel piano RHTX, perchè



chè altrimenti questo piano segherebbe la retta CS in qualsivoglia altro punto E: così, in questo stesso piano conducendo la retta BE, necessariamente la retta CS perpendicolare ad SB sarebbe obliqua sopra BE, e per conseguenza sopra'l piano RHTX; il che è contro l'ipotesi.

470. *Se due piani sono fra lor paralleli, tutte le perpendicolari tirate fra detti due piani faranno uguali.* Il ch'è manifesto, perocchè i due piani sono sempre in egual distanza, e le distanze misuranli dalle perpendicolari.

471. PROBLEMA. *Da un dato punto A ( Fig. 303. ) fuori d' un piano MNOP tirar' una perpendicolare sopra lo stesso piano.*

Conduco nel piano qualsivoglia linea RQ; dal dato punto A tiro sopra detta linea una perpendicolare AS; dal punto S conduco nel piano MNOP una retta ST perpendicolare ad RQ, e da A tiro sopra ST la perpendicolare AT, che sarà perpendicolare al piano MNOP.

Poichè, essendo la retta RS perpendicolare sopra i due lati TS, SA del triangolo TSA, è in conseguenza perpendicolare sopra detto triangolo ( N. 463. ): così, conducendo nel piano MNOP la retta XT perpendicolare a TS, per essere la retta XT parallela ad RS, ella sarà parimente perpendicolare al triangolo TSA (N. 467.), e però al lato TA del medesimo triangolo; essendo dunque TA perpendicolare ad XT, come lo è pure a TS per la costruzione, ed essendo XT, TS in un medesimo piano MNOP; ne segue, che TA è perpendicolare sopra'l piano ( N. 463. ).

472. PROBLEMA. *Da un dato punto T sopra un piano MNOP ( Fig. 304. ) alzar' una perpendicolare a detto piano.*

Da qualsivoglia punto A preso fuori del piano tiro una perpendicolare AS; poi dal punto T conducendo TX parallela ad SA, la stessa TX sarà pure perpendicolare al piano ( N. 467. ).

473. *Se una linea retta è inclinata ad un piano, l'angolo minore, ch'essa fa col medesimo, dicesi Angolo d' inclinazione della linea al piano.*

474. PROBLEMA. *Essendo una linea AB ( Fig. 305. ) inclinata ad un piano MNOP, ritrovare 'l suo angolo d' inclinazione ad esso piano.*

Dall'estremità B di detta linea tiro sul piano la perpendicolare BC; e dal punto C conducendo nel piano la retta AC, BAC è l'angolo d'inclinazione; il che io così dimostro.

Facendo centro in A, col raggio AC descrivo nel piano MNOP

il

il circolo CDEHS, e dal punto A concepisco, che sieno alla circonferenza tirati infiniti raggi AD, AE, AH, ec. i quali tutti colla retta BA formeranno differenti angoli BAD, BAE, ec. Tiro la retta BD, e'l triangolo BCD sarà rettangolo; poichè essendo la BC perpendicolare a MNOP, lo è eziandio alle rette AC, CD, che sono nell'istesso piano, e che passano pel punto C: così BD è maggiore di BC. Ora, i triangoli ABC, ABD hanno il lato AB comune, e'l lato AC uguale al lato AD, poichè amendue sono raggi d'un medesimo circolo: ma la base BC dell'uno è minor della base BD dell'altro; dunque l'angolo BAC è minore dell'angolo BAD ( N. 109. ). Colla stessa dimostrazione si proverà, che l'angolo BAE è maggior dell'angolo BAC; e così degli altri. Onde, essendo l'angolo BAC il minore degli angoli, che risultano dalla linea BA colle linee tirate dal punto A nel piano MNOP, egli è l'angolo d'inclinazione della linea BA ad esso piano.

475. Quindi ne segue 1°. Che l'angolo BAH, il qual è l'angolo conseguente dell'angolo d'inclinazione BAC, è l' maggiore di tutti gli angoli, che risultano dalla linea BA col piano. 2°. Che di tutti gli angoli, che sono fra l' maggiore BAH e'l minore BAC, quei, che al maggior più s'avvicinano, son maggiori di quelli, che più se n'allontanano; e finalmente, che si possono sempre trovare due angoli uguali, minori di BAH e maggiori di BAC, ma giammai tre.

Tiro la retta CE nel piano, e la retta EB al vertice B della perpendicolare: così il triangolo EBC sarà rettangolo non meno ch' il triangolo DCB: ma poichè questi due triangoli hanno 'l lato BC comune, e'l lato CD minore del lato CE, per essere l'arco CD minore dell'arco CE, n'avviene; ch' il lato EB del triangolo rettangolo EBC è maggiore del lato BD del triangolo rettangolo BDC: ora, avendo i triangoli ABE, ABD il lato AB comune, il lato AE uguale al lato AD, e la base EB maggiore della base BD, egli è manifesto, che l'angolo BAE, il quale più si discosta dall'angolo d'inclinazione BAC, è maggiore dell'angolo, che meno s'en'allontana; e collo stesso ragionamento si proverà, che l'angolo BAH, cioè l'angolo conseguente dell'angolo d'inclinazione BAC è l' maggiore di tutti quei, che risultano dalla linea AB co' raggi tirati dal centro sopra la semicirconferenza HEC: quanto poi a quelli, che risulteranno dalla medesima linea AB co' raggi tirati dal centro sopra l'altra semicirconferenza HSC, agevol fia pro-

vare, ch'essi faranno uguali ciascuno a ciascuno a quei formati co' raggi della semicirconfenza HEC.

476. *Quindi ne segue ancora, che l'angolo BAC d' inclinazione d'una linea BA sopra un Piano trovasi in un Piano BAC perpendicolare al piano MNOP.*

Poichè, essendo la linea BC perpendicolare al piano MNOP, il triangolo ABC, in cui trovasi la retta BC, è ancora perpendicolare a detto piano.

477. *Se due piani ABCD, EFGH si segano ( Fig. 306. ), la loro comun sezione è una retta.*

Altro non è 'l piano ABCD che la somma de' suoi elementi DC, RX, RX, ec. siccome altro non è 'l piano EFGH che la somma de' suoi FG, SZ, SZ, ec. Onde, quando questi piani vengono a segarsi, gli elementi dell'uno segan quei dell'altro: ora gli elementi essendo tante linee, si segano in un sol punto; perciò la sezione de' due piani è una serie di punti M, O, O, O, ec. N, e conseguentemente una linea: ma considerata questa linea risguardo al piano ABCD, non è in alcuna delle sue parti più o meno sollevata dal lato di G che da quello di F, e considerata riguardo al piano EFGH, non è più o meno sollevata in alcuna delle sue parti dal lato di C che da quello di D; però la comun sezione dee per necessità essere una retta linea.

478. *Se due piani ABCD, EFGH, che si segano ( Fig. 307. ), sono perpendicolari ad un piano MNOP, la loro comun sezione RS è perpendicolare a detto piano.*

Poichè, considerata RS risguardo al piano ABCD perpendicolare sopra MNOP, essa più non inclina al piano MNOP dal lato di E che da quello di H, e per conseguenza è perpendicolare ad EH: così pure, considerata RS risguardo al piano EFGH perpendicolare ancora sopra MNOP, ella più non inclina dal lato di A che da quello di B; onde, essendo RS perpendicolare alle due linee EH, AB, che son nel piano MNOP, essa è perpendicolare a detto piano ( N. 463. ).

479. *Se i lati AB, EC ( Fig. 308. ) d' un' angolo ABC, che trovasi in un piano ABC, sono paralleli a' lati DE, EF di un' altro DEF, che trovasi in un' altro piano DEF; detti due angoli ABC, DEF son' uguali.*

Colla retta BE congiungo i vertici, e facendo avanzare l'angolo ABC, in modo che sia sempre parallelo a se stesso, il lato

AR

AB cade necessariamente sulla sua parallela DE, e 'l lato BC sopra la sua BC; e però i due angoli sono uguali.

480. *L'angolo d'inclinazione di due piani ABED, BEFG ( Fig. 309. ), che si segano, è dovunque lo stesso.*

Supponiamo, che l'angolo ABC sia l'angolo d'inclinazione de' due piani dal lato di B; tiro all'estremità E della comun sezione BE, e nel piano ABDE una retta ED parallela ad AB. Conduco parimente nel piano BEFC una retta EF parallela a BC: così, facendo muovere l'angolo ABC sempre parallelo a se stesso lungo la BE, eglicaderà in fine sopra l'angolo DEC, e li sarà uguale: ma 'l piano, che durante 'l suo moto sarà descritto dalla gamba AB, sarà lo stesso ch' il piano ABED, e quello descritto dall'altra BC sarà 'l medesimo del piano BCFE; onde l'angolo d'inclinazione de' questi due piani è dovunque lo stesso.

481. PROBLEMA. *Trovar l'angolo d'inclinazione di due piani ABED, BCEF ( Fig. 309. ), che si segano.*

Da qualunque punto O preso sopra la comun sezione BE tiro nel piano ABED la retta OR perpendicolare sopra BE, e nel piano BCEF la retta OH altresì perpendicolare sopra BE; e l'angolo ROH sarà l'angolo d'inclinazione, che si cercava.

Poichè la maggiore, o minor' inclinazione de' due piani tra loro consiste unicamente nella maggiore, o minor distanza, ch'essi conservano fra se; dunque i lati RO, OH dell'angolo, che misura quest' inclinazione, non debbono più, o meno avvicinarsi di quello facciano nel verso de' piani, e non debbono in conseguenza inclinare nè dal lato di B, nè da quello di E.

482. *Se due piani paralleli ABCD, EHFG ( Fig. 310. ) sono segati da un terzo MON, le due sezioni RS, PQ son parallele.*

Altrimenti le due sezioni da un lato s'avvicinerebbono, e dall' altro s'allontanerebbero; dunque lo stesso avverrebbe de' due piani, a cui esse spettano, e però non sarebbon più paralleli; il che è contro l'ipotesi.

Quindi n'avviene, che se 'l piano MON, il quale sega i due piani paralleli, è un triangolo, i lati MO, NO di detto triangolo saran tagliati proporzionalmente dalle sezioni RS, PQ. posta però, che MN sia parallela ad RS; il ch'è manifesto.

483. Se tre angoli piani BAC, CAD, DAB ( Fig. 311. ), che trovansi in tre differenti piani, hanno'l vertice A comune, e ch' i loro lati s'adattino; essi formano un'angolo in A, ch' appella-

*Iasi Angolo solido:* tali sono tutti gli angoli de' corpi, le cui facce vanno a terminare in punta.

484. Per formare un'angolo solido se ne ricercano almeno tre di piani; poichè egli è manifesto, che se fra i due angoli piani  $BAD$ ,  $BAC$  non se ne trovasse un terzo  $CAD$ , essi sarebbero in un medesimo piano.

485. Se un'angolo solido  $A$  (Fig. 312.) è formato da tre angoli piani  $SAM$ ,  $MAN$ ,  $NAS$ , due di essi faranno maggiori del rimanente.

Imperocchè, se l'angolo  $SAN$  è maggiore degli altri due, nel piano di detto angolo formo l'angolo  $SAR$  uguale ad  $SAM$ ; e in conseguenza l'angolo rimanente  $RAN$  è maggiore dell'angolo  $NAM$ . Sopra la gamba  $AM$  dell'angolo  $SAM$  piglio la parte  $AR$ , e faccio  $AR = AM$ ; da  $C$  tiro la retta  $CB$ , che sega l'altra gamba  $SA$  dell'angolo  $SAM$  in un punto qualunque  $B$ ; da  $B$  pel punto  $R$  tiro la retta  $BR$ , che sega la retta  $AN$  in  $P$ , e da  $P$  pel punto  $C$  tiro la retta  $CP$ ; ciò che mi dà 'l'angolo  $BCP$ , il qual serve di base all'angolo solido  $A$ .

I triangoli  $BAC$ ,  $BAR$  son perfettamente uguali, a cagione di  $BA$  comune, di  $AC = AR$ , e dell'angolo contenuto  $BAC$  uguale all'angolo contenuto  $BAR$ ; dunque  $BC$  uguale a  $BR$ . Ora, i triangoli  $RAN$ ,  $PAC$  hanno il lato  $AR$  uguale ad  $AC$ , e'l lato  $AP$  comune: ma l'angolo  $RAN$  è maggiore dell'angolo  $PAC$  per ipotesi; dunque la base  $RP$  è maggior della base  $PC$ ; e però  $BR + RP$ , o  $BP$  è maggiore di  $BC + CP$ ; il ch'è impossibile, perocchè in qualsivoglia triangolo  $BPC$  un sol lato  $BP$  è sempre minore degli altri due. Ond'egli è parimente impossibile, che l'angolo  $BAP$  sia maggiore della somma degli altri due  $BAC$ ,  $CAP$ , che formano l'angolo solido  $A$ .

486. La somma degli angoli piani  $BAC$ ,  $CAP$ ,  $PAB$ , che formano un'angolo solido  $A$  (Fig. 312.), sarà sempre minore di quattro retti.

Termino l'angolo solido  $A$  con una base  $BPC$ , la quale co' piani dei tre angoli  $BAC$ ,  $CAP$ ,  $PAB$  formi tre altri angoli solidi  $B$ ,  $C$ ,  $P$ . Ora, nell'angolo solido  $B$ , i due angoli piani  $PBA$ ,  $ABC$  son maggiori del terzo  $PBC$  (N. 485.); similmente, nell'angolo solido  $C$  i due angoli piani  $BCA$ ,  $ACP$  son maggiori del terzo  $BCP$ , e nell'angolo solido  $P$ , i due angoli piani  $CPA$ ,  $APB$  son maggiori del terzo  $CPB$ : ma nel triangolo  $BPC$ , i tre angoli  $PBC$ ,  $BCP$ ,  $CPB$  sono uguali a due retti; dunque li 6  
PBA.

PBA, ABC, BCA, ACP, CPA, APB son maggiori di due retti: ora, tutti gli angoli dei tre triangoli BAC, CAP, PAB sono uguali a 6 retti, perocchè in ogni triangolo i tre angoli sono uguali a due retti; da 6 retti sottraendo dunque il valore degli angoli sopra le basi de' tre triangoli, che vale più di due retti, li tre angoli, i quali formano l'angolo solido A, faran minori di quattro retti; e lo stesso agevolmente si proverebbe, se l'angolo solido A fosse formato da un numero maggiore d'angoli piani.

*Della Misura de' Solidi, e de' lor rapporti.*

487. *Cubo* dicefi un solido contenuto da sei facce, di cui tutt' i lati sono fra loro uguali, e gli angoli son retti ( Fig. 313. ); la faccia ABCD, sopra cui si concepisce che sia appoggiato il solido, appellasi *Base inferiore*, o semplicemente *Base*; l' opposta FGHE alla Base s' appella *Base superiore*; e l' altre quattro dicono *ascendenti*, poichè sono fra la base inferiore e la superiore; egli è manifesto, che l' altezza di questo solido non differisce dall' uno de' lati GB delle facce ascendenti, perocchè tutte le facce son perpendicolari l' une all' altre.

488. Il *Parallelepipedo* è un solido ABCDEFGH ( Fig. 314. ) contenuto da sei parallelogrammi, di cui gli opposti sono uguali: Dicefi *Parallelepipedo rettangolo*, quando tutti gli angoli de' parallelogrammi son retti; ed *inclinato*, quando gli angoli non sono retti.

489. Il *Prisma* APCDEFGHIKLMN ( Fig. 315. ) è un solido contenuto da due basi uguali e parallele ABCDEF, HILNMG, e da tanti parallelogrammi, quanti sono i lati d' ogni base. Egli è *retto*, quando i parallelogrammi ascendenti son perpendicolari alle basi, ed *inclinato*, quando essi sono inclinati fra le basi. Inoltre, se'l Prisma ha per base un triangolo, dicefi *prisma triangolare*; se ha per base un pentagono, dicefi *prisma pentagonale*; e così di seguito.

490. Il *Cilindro* è un solido contenuto da due basi uguali e parallele, che son due cerchi AB, CD ( Fig. 316. ), e da una superficie curva, che regna fra i due cerchi.

Essendo'l circolo un poligono d' infiniti lati, puossi concepire il cilindro come un prisma, la cui base sia composta d' infinite rette, o d' infiniti lati.

491. La *Piramide* è un solido contenuto da una base ABCD ( Fig. 317. ), e da tanti triangoli ascendenti AEB, BEC, CED, DEA, quanti sono i lati della base. Questi triangoli han tutt' i loro

loro vertici in un medesimo punto  $E$ , e la linea  $EO$  tirata dal vertice al centro  $O$  della base dicesi *Asse*: ora quest'asse non differisce dall'altezza, quando egli è perpendicolare alla base, ma quando vi è inclinato, inclinata è pure la piramide, e l'altezza dee prenderli dalla perpendicolare tirata dal vertice  $E$  sopra la base.

492. Il *Cono* è una piramide  $ABE$  (Fig. 318.), la cui base  $AB$  è un circolo. Dicesi *retto*, se l' suo asse  $EO$  cade perpendicolarmente sopra la base, e inclinato se cade obliquamente.

493. La *Sfera* è un solido  $ABCD$  (Fig. 319.) perfettamente rotondo, nel cui mezzo evvi un punto  $O$  equidistante da tutt'i punti della superficie. Se si concepisce, ch'un semicircolo  $ACB$  si ravvolga intorno al suo diametro immobile  $BA$ , colla sua rivoluzione egli descriverà una Sfera. Qualunque retta  $BA$ , che passi pel centro  $O$ , e che dall'una e dall'altra parte termini alla superficie, si dice *Asse*, o *Diametro della Sfera*; e qualunque linea  $OB$  tirata dal centro alla superficie chiamasi *Raggio*.

494. PROPOSIZIONE CVII. *Se un parallelepipedo, un prisma, od un cilindro retti, ed inclinati sono segati da un piano parallelo alla base, sarà detto piano simile ed uguale alla base.*

Sia il parallelepipedo  $ABCDEFGH$  (Fig. 314.) segato dal piano  $MNOP$  parallelo alla sua base  $ABCD$ ; essendo l' parallelogrammo  $BCHG$  tagliato dai due piani  $MNOP$ ,  $ABCD$  fra lor paralleli, anche le sezioni  $NO$ ,  $BC$  fatte sopra detto parallelogrammo son parallele (N. 482.), ed in conseguenza uguali, per essere fra le parallele  $BG$ ,  $CH$ . Nello stesso modo si proverà, che i tre lati del piano  $MNOP$  sono uguali e paralleli ciascuno a ciascuno agli altri tre della base  $ABCD$ : ora, gli angoli del piano  $MNOP$  son parimente uguali a quei della base, per essere i loro lati paralleli a quei della base; dunque i due piani  $MNOP$ ,  $ABCD$  sono simili, ed uguali. Lo stesso egualmente si dimostrerà d'un cubo; imperocchè egli altro non è ch'un parallelepipedo rettangolo, di cui uguali sono i lati della base, e l'altezza.

495. PROPOSIZIONE CVIII. *Qualsivoglia cubo, parallelepipedo, prisma e cilindro retti, ed inclinati sono uguali alla sua base moltiplicata per l'altezza, cioè per la perpendicolare tirata fra le due basi.*

Sia il parallelepipedo  $AB$  (Fig. 320.); se si concepisce, ch'ei sia tagliato da infiniti piani paralleli alla base e infinitamente prossimi, la somma di detti piani farà uguale al parallelepipedo. Ora, tutti questi piani son uguali alla base (N. 494.); altro non è  
due-

dunque la lor somma che la base presa tante volte, quanti sono i piani, cioè la base moltiplicata per la grandezza, che denota la moltitudine de' piani. Ma l'altezza AC del parallelepipedo viene segata da' piani in tante parti infinitamente picciole ed uguali, e ogn' una di queste è l'altezza infinitamente picciola di ciascun piano, poichè l'altezza si misurano colle perpendicolari; onde l'altezza AC dinota la moltitudine de' piani, che compongono il parallelepipedo; e per conseguenza questo solido equivale al prodotto della base per la sua altezza.

Così ancora si proverà, che l'parallelepipedo inclinato AB ( Fig. 321. ) equivale al prodotto della sua base per la sua altezza CE; poichè sebbene il limite inclinato AC sia segato dai piani in tante parti uguali, quanti sono i piani, che compongono l' solido, tuttavia, siccome questa linea non è perpendicolare fra i piani, ognuna delle sue parti è maggiore dell'altezza infinitamente picciola di ciascuno de' piani, là dove ogni particella della perpendicolare CE è precisamente uguale all'altezza infinitamente picciola di ciascun piano; dal che ne segue, che la perpendicolare è quella, ch' esprimer ne dee la moltitudine, e che perciò il parallelepipedo equivale alla sua base moltiplicata per la sua altezza.

496. COROLLARIO I°. *Tutti i parallelepipedi, prismi e cilindri, che hanno la medesima base ed altezza, ovvero le basi e l'altezza uguali, sono uguali.*

Ciò è per se evidente, poich' essi sono i prodotti delle lor basi per la loro altezza.

497. COROLLARIO II. *I parallelepipedi, i prismi e cilindri, che hanno le basi uguali e l'altezza disuguali, sono fra loro come l'altezza; quei, che hanno le basi disuguali e l'altezza uguali, sono fra loro come le lor basi; e quei, che hanno le basi reciproche all'altezza, sono uguali.*

Sieno i due parallelepipedi AF, MR ( Fig. 322. ): se supponiamo, che le due basi sieno uguali, le chiamo ambedue X; così l' primo è  $X \times HA$ , e l' secondo  $X \times MT$ : ora, essendo l'altezza HA, MT moltiplicate per una medesima grandezza X, i prodotti  $X \times HA$ ,  $X \times MT$  sono fra loro come HA, MT; dunque i parallelepipedi sono fra loro come l'altezza HA, MT.

Così pure si dimostrerà, che se le basi son disuguali e l'altezza uguali, i parallelepipedi sono fra loro come le basi.

In fine, se le basi son reciproche all'altezza, cioè se ABCD. MNOP :: MT. AH, facendo il prodotto degli estremi e de' medj



medj s'avrà  $ABCD \times AH = MNOP \times MT$ , cioè i due paralelepipedu uguali.

498. COROLLARIO III. *I paralelepipedu, i prismi e cilindri sono fra loro in ragion composta della ragione delle loro altezze, e di quella delle lor basi.*

Sieno i due paralelepipedu AF, MR (Fig. 322.); la ragione delle loro altezze è AH, MT; quella delle lor basi è ABCD, MNOP, e la composta delle due si è  $AH \times ABCD$ ,  $MT \times MNOP$ : Ora i due termini di questa ragione sono li due paralelepipedu; perciò detti due solidi sono in ragion composta, ec.

499. PROPOSIZIONE CIX. *Se una piramide ABCDE, la cui altezza è EQ (Fig. 323.), viene segata da un piano MNOP parallelo alla base ABCD: dico 1°. egli sarà simile alla base. 2°. Che sarà alla base, come il quadrato della sua altezza SE al quadrato dell' altezza QE della base, prendendo per altezze le distanze de' piani al vertice E della piramide.*

Essendo la faccia AEB segata dai due piani MNOP, ABCD paralleli tra loro, le sezioni MN, AB sono fra se parallele. Per la stessa ragione, gli altri tre lati del piano MNOP son paralleli ai tre lati della base. Ora, nella faccia AEB abbiamo MN. AB :: ME. AE, a cagione delle parallele MN, AB; e perciò nella faccia ADE abbiamo MP. AD :: ME. AE. Dunque MN. AB :: MP. AD; il che fa vedere, essere i lati MN, MD del piano MNOP proporzionali a' lati AB, AD della base. E così troveremo ancora, che gli altri due lati NO, ON del piano MNOP son similmente proporzionali a' lati DC, CB della base. Ma gli angoli del piano MNOP equivagliano ciascuno a ciascuno agli angoli della base, per essere i lati paralleli; onde il piano MNOP è simile alla base. Il che dovea 1°. dimostrarfi.

Simili essendo i piani MNOP, ABCD, sono fra loro come i quadri de' lor lati omologhi MN, AB: ma noi abbiamo MN. AB :: ME. AE; i due piani son dunque fra loro come i quadrati di ME, AE. Dal punto Q, ove la perpendicolare sega la base, tiro la retta AQ, il che mi dà il triangolo AQE, in cui le due sezioni MS, AQ, formate dai due piani MNOP, ABCD fra loro paralleli, son parallele. Così noi abbiamo SE. QE :: ME. AE; e per conseguenza i due piani MNOP, ABCD, essendo fra loro come i quadri di ME, AE, sono parimente come i quadrati di SE, QE. Il che dovea 2°. dimostrarfi.

Lo stesso si proverà d'una piramide inclinata ABCE (Fig. 324.); poi-

poichè, prolungando il piano MNOP e la base fino al concorso della perpendicolare EQ tirata dal vertice sopra la base, e tirando nella base la retta AQ, che darà 'l triangolo AQE, le sezioni MS, AQ, fatte sul triangolo dai piani paralleli MNOP, ABCD prolungati, saran parallele: così avremo ES. EQ : : EM. EA : : MN. AB; e li piani PMNO, ABCD essendo fra loro, perchè son simili, come i quadri de'lorolati omologhi MN, AB, faranno in conseguenza come i quadri delle loro altezze ES, EQ.

500. PROPOSIZIONE CX. *Le piramidi, che hanno le basi e l' altezze uguali, son' uguali fra loro.*

Sieno le due piramidi ABCDE, HZVQ ( Fig. 325. ), in cui suppongo, che la base quadra della prima sia uguale alla basetrian-golare della seconda, e che l' altezza OE sia uguale all' altezza QX. Segò l' una e l' altra co' piani MNLP, RYT paralleli alla base, e posti in eguali distanze dai vertici E, Q, ciò che mi dà

$ES = QF$ : ora, nella prima piramide,  $MNLP. ABCD :: \overline{SE}. \overline{OE}$  ( N. 499. ), e nella seconda,  $RYT. HZV :: \overline{QF}. \overline{QX}$ ; dunque, per essere  $\overline{QF} = \overline{ES}$ , e  $\overline{QX} = \overline{OE}$ , ho  $MNLP. ABCD :: RYT. HZV$ : ma  $ABCD = HZV$ ; onde  $MNLP = RYT$ .

Ora se si concepisce, ch' amendue le piramidi sieno segate da infiniti piani paralleli alla base, nell' una non vi sarà maggior numero de' piani che nell' altra, per essere l' altezze uguali; e ciascun piano dell' una sarà uguale a ciascun piano dell' altra posto in egual distanza dal vertice, come abbiám veduto; dunque la somma de' piani dell' una equivarrà alla somma de' piani dell' altra, e conseguentemente le due piramidi saranno uguali.

501. COROLLARIO. Quanto nelle due precedenti proposizioni s' è detto circa le piramidi dee ancora intendersi de' coni retti, od inclinati; perocchè i coni sono piramidi, le cui basi hanno infiniti lati.

502. PROPOSIZIONE CXI. *Qualunque prisma triangolare ABCDEF ( Fig. 326. ) può dividersi in tre piramidi uguali.*

Segò i tre parallelogrammi ascendenti colle diagonali AF, FC, EC, e faccio passare un piano per le due AF, FC, ed un' altro per le due FC, EC; il che mi dà tre piramidi ABCF, EFDC, ECAF: ora, le due prime han le basi ABC, DEF non meno che le loro altezze BF, DC uguali; e se si concepisce, che la seconda EFDC abbia per base il triangolo ECD, e che la base della terza ECAF sia 'l triangolo ECA, si troverà, che dette due pi-

Tomo II.

K

ramidi

ramidi son parimente uguali, poichè uguali sono le lor basi EAC, ECD, ed hanno i loro vertici nello stesso punto F, il che dà loro una medesima altezza. Onde le tre piramidi sono uguali.

503. COROLLARIO. Qualunque prisma triangolare ABCDEF è dunque il triplo d'una piramide ABCF d'ugual base, ed altezza.

504. PROPOSIZIONE CXII. Ogni piramide, di qualunque numero di lati sia la sua base, è 'l terzo d'un prisma d'ugual base, ed altezza.

Sia la piramide pentagonale ABCDEF (Fig. 327.); dal punto O, in cui 'l suo asse sega la base, tiro delle rette OA, OB, OC, ec. a tutti gli angoli, il che divide la base in tanti triangoli, quanti sono i suoi lati. Sego la piramide con dei piani, che passino pel vertice F e per le rette OA, OB, OC, ec. ed essa si troverà divisa da cinque piramidi triangolari, ognuna delle quali avrà per base l'uno de' triangoli della base. Sopra detti triangoli costruisco de' prismi triangolari d'uguale altezza, e questi cinque prismi presi insieme formano un prisma totale, di cui la base è simile a quella della piramide, e l'altezza è uguale: ora, qualunque prisma triangolare è 'l triplo della piramide triangolare corrispondente; dunque il prisma totale è 'l triplo della piramide totale, e per conseguenza la piramide n'è il terzo.

E lo stesso si dimostrerà delle piramidi inclinate, e de' con retti, od inclinati.

505. COROLLARIO. Le piramidi, che han le basi uguali e l'altezze disuguali, sono fra esse come le loro altezze: quelle, che hanno l'altezze uguali e le basi disuguali, sono fra loro come le lor basi; e quelle, che han l'altezze reciproche alle basi, sono uguali.

Le piramidi sono il terzo de' prismi d'ugual base, ed altezza: ma ciò che conviene agl'interi, conviene a' loro terzi; dunque quello, che s'è detto de' prismi (N. 497.), dicasi ancora delle piramidi.

506. PROPOSIZIONE CXII. Se data una piramide ABCF (Fig. 328.) vien'ella segata da un piano OED parallelo alla base; dico, che per avere il valor della parte troncata ABCDEO, conviene prima cercare un piano medio proporzionale Geometrico fra la base inferiore e la superior DEO, poi sommar desso piano alle due basi, e moltiplicare il tutto pel terzo dell'altezza XZ della parte troncata ABCDEO.

Supponiamo, che la piramide sia triangolare: sego due delle facce ascendenti ABEO, BCDE con delle diagonali AE, CE, e fa-

facendo per dette due diagonali passare un piano, dalla piramide troncata levo la piramide ABCE, e me ne resta un'altra AODCE; colla diagonale OC sego la faccia AODC, e con un piano, che passi per lo vertice E e la diagonale OC, sego AODCE; il che mi dà due altre piramidi AOCE, ODCE.

Ora, cerco l' rapporto della prima di queste tre piramidi ABCE alla seconda AOCE; e siccome esse hanno due facce ABE, OEA, le quali sono sopra un medesimo piano, s' io le piglio per loro basi, avranno amendue il vertice in C, e per conseguente la loro altezza sarà uguale; quindi dette due piramidi faran fra loro come le basi ABE, OEA: ma essendo queste due basi, o questi due triangoli fra le due parallele AB, OE, sono tra loro come le basi AB, OE; onde le due piramidi faranno fra esse come AB, OE: così, chiamando P la prima ABCE, ed S la seconda AOCE, avremo  $P. S :: AB. OE$ .

Cerco parimente il rapporto della seconda AOCE alla terza ODCE, e prendendo per loro basi le facce AOC, ODC, le quali sono sopra un medesimo piano, trovo che hanno il comun vertice in E, e per conseguenza esser d' ugal' altezza; quindi dette due piramidi sono fra loro come le lor basi, o come i lor triangoli AOC, ODC: ma essendo questi triangoli fra le parallele AC, OD, sono fra loro come le lor basi AC, OD, e a cagione de' triangoli simili ABC, OED abbiamo  $AC. OD :: AB. OE$ ; le due piramidi AOCE, ODCE son dunque fra loro come AB. OE: così, chiamando T la terza ODCE, abbiamo  $S. T :: AB. OE$ : ma prima si è trovato  $P. S :: AB. OE$ ; perciò abbiamo ancora  $P. S :: S. T$ ; cioè le tre piramidi, che compongono la piramide troncata ABCDEO, sono in proporzione continua.

Cerco un piano medio proporzionale, ch'io chiamo V, tra la base inferiore ABG e la superiore OED, il che mi dà ABC. V :: V. OED; e moltiplicando tutto per la medesima grandezza  $\frac{1}{3}XZ$ , cioè pel terzo dell' altezza XZ del segmento, le tre quantità  $ABC \times \frac{1}{3}XZ$ ,  $V \times \frac{1}{3}XZ$  e  $OED \times \frac{1}{3}XZ$  sono parimente in proporzione continua: ora, la prima  $ABC \times \frac{1}{3}XZ$  è uguale alla prima piramide ABCE, e la terza  $OED \times \frac{1}{3}XZ$  è uguale alla terza ODCE; dunque la seconda  $V \times \frac{1}{3}XZ$  equivale dec alla seconda AOCE; ed in conseguenza il segmento ABCDEO equivale ai tre piani ABC, V, OED moltiplicati pel terzo dell' altezza XZ del segmento.

Se la piramide non è triangolare ( Fig. 329. ), da' centri X, Z delle due basi tiro delle rette ai loro angoli, e facendo passare

K 2 de'

de' piani per le linee di divisione dell'una e dell'altra base, il segmento trovasi diviso in tanti segmenti di piramidi triangolari, quanti sono i lati della base; e ciascuno di detti segmenti sarà uguale alle sue due basi triangolari sommate al piano medio proporzionale, il tutto moltiplicato per  $\frac{1}{3}ZX$ . Ora, s'io prendo un piano medio proporzionale  $MNPQ$  fra le basi totali  $ABCD$  ed  $HEFG$ , ei si troverà diviso in un numero di triangoli uguale a quello di queste basi, e ognuno di detti triangoli sarà medio proporzionale fra le due basi della piramide triangolare, che da esso verrà segata; onde sommando insieme li piani  $ABCD$ ,  $MNPQ$ ,  $HEFG$ , e moltiplicando la somma per  $\frac{1}{3}XZ$ , avrem tosto la somma de' segmenti triangolari componenti'l segmento  $AF$ .

Egli è agevol cosa applicare quanto abbiamo fin qui detto ai segmenti delle piramidi inclinate.

507. PROPOSIZIONE CXIII. *Qualunque prisma triangolare troncato ( Fig. 330. 331. 332. 333. ) equivale al triangolo ABC, che li serve di base, moltiplicato pel terzo dei tre limisi, che formano i piani ascendenti, cioè pel terzo delle sue tre lunghezze.*

O'l prisma triangolare è troncato sol da una delle sue estremità ( Fig. 332. 333. 334. ), o da amendue ( Fig. 335. ). S' egli non è troncato che da una, può accadere, 1°. Che due delle sue lunghezze  $BE$ ,  $CD$  ( Fig. 330. ) sieno uguali, e che la terza  $AH$  sia maggior di ciascuna dell'altre due. 2°. Ch'uguali essendo due delle sue lunghezze  $AH$ ,  $CG$  ( Fig. 331. ), la terza  $BE$  sia minore di ciascuna d'esse. 3°. Finalmente, che le tre lunghezze  $AH$ ,  $BE$ ,  $CG$  sieno fra lor disuguali ( Fig. 332. ). Esaminiamo tutti questi casi in particolare.

Se la lunghezza  $AH$  è maggiore delle due uguali  $BE$ ,  $CD$  ( Fig. 330. ), sego'l prisma con un piano  $EFD$  parallelo alla base  $ADG$ , e che passi per l'estremità  $E$ ,  $D$  delle lunghezze uguali  $BE$ ,  $CD$ ; ciò che sega'l prisma troncato in due solidi, di cui l'uno si è'l prisma  $ABCDE$ , e l'altrola piramide  $DEFH$ : ora, il prisma  $ABCDE$  equivale alla sua base  $ABC$  moltiplicata per la lunghezza  $BE$ , o pel terzo delle sue tre lunghezze uguali  $AF$ ,  $BE$ ,  $CD$ ; e la piramide alla sua base  $DEF$ , o alla sua uguale  $ABC$  moltiplicata pel terzo della sua altezza  $FH$ : così'l prisma troncato  $ABCDEH$  equivale alla sua base  $ABC$  moltiplicata per lo terzo delle tre lunghezze  $DC$ ,  $BE$ ,  $AF$ , più'l terzo della lunghezza  $FH$ : ma il terzo di  $AF$ , più quello di  $FH$  è uguale al terzo di  $AH$ ; il prisma troncato è dunque uguale alla sua base

vol.

moltiplicata pel terzo delle sue tre lunghezze CD, BE, AH.

Se le due lunghezze uguali AH, CG (Fig. 331.) sono maggiori della terza BE, sego 'l prisma con un piano DEF parallelo alla sua base ABC, e che passi per l'estremità E della terza lunghezza BE; ciò che sega il prisma troncato in due solidi, di cui l'uno si è 'l prisma triangolare ABCDEF, e l'altro la piramide DGHE.

Colla diagonale HD sego la faccia DGHF di detta piramide, e facendo per detta diagonale e pel vertice E passare un piano, la piramide DGHE è segata in altre due HDGE, DGHE fra loro eguali, per essere il vertice E comune, e le basi HGD, HDE visibilmente uguali, poichè DGHF è un parallelogrammo, di cui HD è la diagonale. Ma pigliando per base della piramide FEDH il piano FED = ADC, l'altezza di detta piramide si è la retta FH; onde questa piramide è uguale al piano ADC moltiplicato per  $\frac{1}{3}FH$ , e conseguentemente l'altra DGHE equivale allo stesso piano ADC moltiplicato per  $\frac{1}{3}FH$ , o per  $\frac{1}{3}GD$ , a cagione di  $GD = FH$ ; e siccome 'l prisma ABCDEF è uguale al medesimo piano moltiplicato pel terzo delle rette CD, BE, AF, così ne segue, ch' il prisma troncato, composto di detti tre solidi, equivale al prodotto della base ABC moltiplicata pel terzo delle rette CD, BE, AF, più 'l terzo di FH, più quello di DG; ma  $\frac{1}{3}AF + \frac{1}{3}FH = \frac{1}{3}AH$ , e  $\frac{1}{3}CD + \frac{1}{3}DG = \frac{1}{3}CG$ ; onde 'l prisma troncato equivale alla sua base ABC moltiplicata per  $\frac{1}{3}BE + \frac{1}{3}AH + \frac{1}{3}CG$ .

Se le tre lunghezze AH, BE, CG son disuguali (Fig. 332.), opero come nel caso precedente, e 'l prisma troncato trovasi diviso in un prisma triangolare ABCDEF e in due piramidi DGHE, DHFE, che hanno il vertice E comune, e che sono per conseguenza come le lor basi disuguali DGH, DHF: ma essendo queste basi, o questi triangoli fra le parallele DG, FH, sono fra loro come le lor basi GD, FH; onde le due piramidi sono fra loro come le rette GD, FH. Ora, prendendo per base della piramide DHFE il piano FED, l'altezza n'è FH; dunque la piramide DGHE equivale dee ad un'altra piramide, ch'abbia per base lo stesso piano FED, e per altezza la linea GD; poichè, essendo le basi uguali, questa nuova piramide sarebbe alla piramide DGHE, come GD, FH. Così la piramide DEFH = FED  $\times \frac{1}{3}FH = ABC \times \frac{1}{3}FH$ ; la piramide DGHE = ABC  $\times \frac{1}{3}DG$ ,

e'l

e' l'prisma  $ABCDEF = ABC \times \frac{1}{3}AF + \frac{1}{3}BE + \frac{1}{3}CD$ . Dunque il prisma  
troncato  $ABCGHE = ABC \times \frac{1}{3}AF + \frac{1}{3}BE + \frac{1}{3}CD + \frac{1}{3}FH + \frac{1}{3}DG$ ;  
ma  $\frac{1}{3}AF + \frac{1}{3}FH = \frac{1}{3}AH$ , e  $\frac{1}{3}CD + \frac{1}{3}DG = \frac{1}{3}CG$ ; onde  
 $ABCGHE = ABC \times \frac{1}{3}AH + \frac{1}{3}BE + \frac{1}{3}CG$ .

Alla fine, se' l'prisma triangolare è troncato dalle sue due estremità ( *Fig. 333.* ), taglio i suoi tre limiti con un piano  $ABC$ , che lor sia perpendicolare, il che sega detto prisma in due altri  $ABCDHE$ ,  $ABCMON$ , ognuno de' quali è troncato da una sola delle sue estremità. Così l' primo  $ABCDHE$  equivale al piano  $ABC$  moltiplicato pel terzo delle sue tre lunghezze  $AH$ ,  $EB$ ,  $CD$ , e l' secondo  $ABCMON$  al piano  $ABC$  moltiplicato pel terzo delle sue tre lunghezze  $AO$ ,  $BN$ ,  $CM$ ; dunque li due insieme, cioè il prisma totale è uguale al piano  $ABC$  moltiplicato pel terzo delle tre lunghezze  $OH$ ,  $NE$ ,  $MD$ .

508. AVVERTIMENTO. Quantunque le cose predette riguardino l' solo prisma triangolare troncato, possono nondimeno servirci anche per misurare qualunque prisma troncato. Sia, per esempio, il prisma pentagonale troncato  $ABCDEFGHIL$  ( *Fig. 334.* ). Dall' uno degli angoli  $E$  della base tiro agli altri delle rette  $EB$ ,  $EC$ , il che divide la medesima base in tre triangoli; e concepisco, che sieno sopra queste rette  $EB$ ,  $EC$  alzati de' piani perpendicolari alla base, i quali divideranno l' prisma troncato in tre prismi triangolari troncati. Così, misurando ciascuno di questi prismi in particolare, la lor somma darannmi l' prisma totale. Nel resto, con assai maggior facilità trovasi l' valore de' prismi troncati mediante l' centro di gravità della base, come vedremo nel terzo Libro; ed io non ho qui parlato del prisma triangolare troncato ch' a solo fine di facilitare il seguente Problema, il quale concerne la misura de' Rivestimenti, o delle Mura delle Piazze da Guerra.

509. PROBLEMA. *Misurare il Rivestimento d' una Piazza da Guerra.*

Ognun sa, che le Mura delle Piazze da guerra hanno una scarpa di muro, cioè che han più grossezza nel basso che nell' alto; e in ciò appunto consiste la difficoltà di misurarle. Or' ecco quello, che fra tutt' i metodi mi pare l' più semplice e facile, quantunque il meno usitato, forse perchè men noto degli altri, o perchè difficilmente si lascian le strade ordinarie. Ciò si giudicherà esser vero, se vorremo paragonarlo alla pratica comunemente seguita.

Sia

Sia dunque il Solido della Figura 335, che rappresenta un semi Bastione, ed una parte della Cortina.

Misuro prima la lunghezza e la larghezza della muraglia al vertice, e siccome queste due dimensioni formano i trapezoidi ABCD, DCEF, FEHI, ognun de' quali ha l'altezza comune RT, sommo insieme le loro lunghezze medie SV, VX, XZ, e moltiplicando la somma per l'altezza RT, il prodotto si è'l valore dei tre trapezoidi; moltiplico questo prodotto per l'altezza Aa della muraglia, ed ho il valore d'una muraglia senza scarpa, la cui base è composta di tre trapezoidi aMNb, bNoc, OcdL uguali ciascuno a ciascuno ai tre superiori.

Ora per misurare la scarpa di muro, considero, esser' ella composta di tre prismi triangolari troncati MeBDFN, DN/gOF, gOFbL, e perciò io sego l'uno d'essi con un piano rsi perpendicolare alle sue tre lunghezze; e siccome questa sezione è la stessa nei tre prismi, unisco le loro tre lunghezze BDFi, MNOL, esgb, e prendendo l' terzo di detta somma, il moltiplico per lo piano rsi; ciò che mi dà ad un tratto la scarpa di muro, che sommata alla muraglia senza scarpa mi dà l' intero rivestimento.

Quindi manifesto apparisce, che le stesse operazioni far si potrebbe, quando anche il fianco fosse rotondo, e coperto d' un orecchione.

510. PROPOSIZIONE CXVI. *La sfera equivale a due terzi d' un cilindro d' ugual' altezza, che abbia per base'l circolo del diametro della sfera, cioè il massimo circolo d' essa.*

Sia'l quarto di circolo ABC ( Fig. 337. ), che avvolgendosi intorno'l suo raggio fisso BC descrive una semisfera ABL. Descrivo il quadro ACBM del raggio BM, e'l sego colla diagonale MC, la quale forma il triangolo rettangolo isoscele MBC; concepisco, ch' il raggio BC sia diviso in un' infinità di particelle fra loro uguali, e che da' punti di divisione O, T, ec. sieno tirate delle perpendicolari OQ, TX a detto raggio, che terminino sopra AM: esse saranno elementi del quadrato AMBC; le loro parti OR, TZ, ec. che vanno a terminare sulla circonferenza del quarto di circolo, faranno gli elementi di questo quarto di circolo, e le parti OS, TV, ec. che vanno a terminare sopra la diagonale MC, saranno gli elementi del triangolo rettangolo isoscele MBG; tal che qualsivoglia Elemento OS ec. di detto triangolo equivarrà alla sua distanza OC, ec. del centro C, poichè i triangoli simili MBC, SOC ci danno MB. BC :: SO. OC: ma MB = BC; dun-



dunque  $SO = OC$ ; ed egli è facile comprendere, che qualunque elemento  $OQ$ ,  $TX$ , ec. del quadro  $ACBM$  sarà uguale al raggio  $BC$ : ciò posto.

Se si concepisce, che'l quadro  $ACBM$ , il quarto di circolo  $ABC$  e'l triangolo  $MBC$  si ravvolgano intorno'l raggio fisso  $BC$ ; gli elementi del quadro  $ACBM$  descriveran de' circoli tutti uguali, che formeranno un cilindro  $AMHL$ ; quei del quarto di circolo descriveran de' circoli, che formeranno una semisfera  $ABL$ , e'l cui massimo sarà quello descritto dal raggio  $AC$ , che perciò dicesi'l circolo massimo della sfera; e gli elementi del triangolo  $MBC$  descriveran de' circoli, che formeranno un cono  $MCH$ . Ora, essendo questi circoli fra loro come i quadri de' lor raggi, in vece de' circoli si pongano per un momento i quadrati; e per la proprietà del circolo avremo  $\overline{OR} = \overline{BC} - \overline{OC}$  (N. 284):

ma  $BC = OQ$ , ed  $OC = OS$ ; dunque  $\overline{OR} = \overline{OQ} - \overline{OS}$ ; per la stessa ragione noi avremo  $\overline{TZ} = \overline{TX} - \overline{TV}$ , e così degli altri; cioè i quadrati degli elementi del quarto di circolo son' uguali ai quadri degli elementi del quadrato  $ACBM$ , meno i quadri degli elementi del triangolo  $MBC$ ; onde, rimettendo i circoli in vece de' quadri, avremo i circoli descritti dagli elementi del quarto del circolo, in cui la semisfera  $ABL$  equivale a' circoli descritti dagli elementi del quadro  $ACBM$ , od al cilindro  $AMHL$ , meno i circoli descritti dagli elementi del triangolo  $MBC$ , o meno il cono  $MBC$ : ma poichè il cono  $MBC$  è una piramide d'infiniti lati, egli è'l terzo del cilindro  $AMHL$ , ch'è un prisma d'infiniti lati della stessa base ed altezza del cono; la semisfera  $ABL$  è dunque uguale ai due terzi del cilindro  $AMHL$ .

Nel modo stesso si proverà, che la semisfera  $AKL$  equivale ai due terzi del cilindro  $APEL$ , e ch'in conseguenza l'intera sfera è uguale ai due terzi del cilindro  $MPEH$ .

511. COROLLARIO 1°. *Tutti i circoli elementari componenti una sfera  $ABCD$  (Fig. 336.) sono al massimo circolo  $AC$  moltiplicato pel numero, ch'esprime la loro moltitudine, cioè pel diametro  $BD$ , come 2 a 3.*

Il massimo circolo  $AC$  moltiplicato per  $BD$  forma'l cilindro  $MNOP$ : ma, la sfera, o la somma di questi circoli elementari è i due terzi del cilindro; onde la somma de' circoli elementari è al massimo  $AC$  moltiplicato per  $BD$ , come 2 a 3.

512. CO.

512. COROLLARIO II. Un segmento di sfera ABC (Fig. 338.) equivale alla porzione MPSR del cilindro circoscritto, che ha la medesima altezza del segmento, menol' cono troncato MHLP d'uguale altezza; la zona QEFY, che ha per base il massimo circolo, equivale alla porzione cilindrica QTVY d'uguale altezza, menol' cono XOZ dell'istessa altezza; la zona EACF equivale alla porzione cilindrica TRSV della medesima altezza, menol' cono troncato HXZL dell'istessa altezza; la zona aEFb equivale alla porzione cilindrica mTVn dell'istessa altezza, meno i coni XZO, cOd; e'l settore ABCO al segmento ABC più'l cono AOC.

Ciò manifesto si scorge per la precedente proposizione: ma vedremo in progresso, che molto più agevolmente misurar si possono tutte quelle porzioni di sfera col mezzo delle loro superficie.

513. DIFFINIZIONE. Se un cilindro ABCD (Fig. 339.) è tagliato da un piano inclinato MXN; che seghi la sua base di dentro, la porzione cilindrica MXNA tagliata da detto piano dicesi *Ungula cilindrica*: se'l piano segante MXN passa pel centro O della base, l'ungula MXNA appelleraffi *Ungula cilindrica della prima spezie*. E se'l piano segante PZQ, od RTS non passa pel centro O della base, l'ungula PZQA, od RTSA chiameraffi *ungula cilindrica della seconda spezie*.

PROPOSIZIONE CXVII. Qualsivoglia ungula cilindrica della prima spezie è composta d'infiniti triangoli rettangoli, che sono fra loro come i circoli elementari d'una sfera.

514. Sia l'ungula della prima spezie ABCD (Fig. 340.); la sua base è dunque un semicircolo, poichè'l piano inclinato ABC passa pel centro O della base del cilindro, in cui viene segata quell'ungula; e per conseguenza la comun sezione AC del piano inclinato e della base è un diametro: ora, ciò posto.

Supponiamo, che nella base, o semicircolo ADC sieno tirate delle rette LP, RS, OD, ec. infinitamente prossime, e perpendicolari al diametro AC, e che sieno sopra ognuna d'esse alzati de' piani LQP, RTS, ec. perpendicolari alla base ADC dell'ungula, e seganti l'ungula stessa. 1°. Tutti questi piani seganti faranno de' triangoli rettangoli LPQ, RST, ec. la comun sezione di ciascheduno d'essi e della base ADC sarà una retta linea (N. 477.), non meno che la comun sezione d'ognun di loro, e del piano ABC; e siccome la superficie d'un'ungula ABCD, o del cilindro, in cui egli è segato, altro non è ch'una serie di rette linee alzate perpendicolarmente sopra tutt' i punti della circonferenza ADC della base; egli è per se evidente, che qualunque piano segante, co-

me LPQ, perpendicolare alla base ADC non può segar la superficie dell'ungula che coll'una delle sue perpendicolari PQ, e ch' in conseguenza detto piano LPQ esser dee un triangolo rettangolo; poichè essendo QP perpendicolare alla base ADC, egli esser dee altresì perpendicolare ad LP, che trovasi in detta base, e che passa pel punto P ( N. 463. ). 2°. Simili faranno i piani seganti, o triangoli rettangoli LPQ, RST, ec. che taglieran l'ungula; poichè, essendo fra loro paralleli, le rette QL, TR, ec. in cui essi segheranno l' piano inclinato ABC, saran parallele ( N. 482. ), non meno che le rette LP, RS, in cui quelli stessi triangoli segano la base ADC dell'ungula: così, paralleli essendo ciascuno a ciascuno i lati degli angoli acuti QLP, TRS, ec. di detti triangoli (N.479.), faranno uguali, ed in conseguenza simili saran fra loro tutt' i triangoli rettangoli QLP, TRS, ec. Ora, i triangoli simili sono fra lor come i quadri de' loro lati omologhi; onde tutt' i triangoli rettangoli QLP, TRP, ec. che segheranno l'ungula, sono fra loro come i quadrati delle lor basi LP, RS, ec. o come i circoli, che farebbon descritti da queste basi girando intorno l' diametro AC: ma tutti questi circoli comporrebbero una sfera; dunque, ec.

514. COROLLARIO I°. *Il massimo di tutt' i triangoli rettangoli componenti un'ungula si è l' triangolo ODB, che passa pel centro O della base del cilindro; e gli altri sono uguali due a due.*

I triangoli componenti l'ungula sono fra essi come i quadri delle lor basi LP, RS, ec. ora, poichè queste basi sono gli elementi del semicircolo ADC, la maggiore si è l'raggio OD; dunque ODB è l' triangolo maggiore: così pure, le basi RS, MN equidistanti dalla base OD son' uguali, perchè sono le metà delle corde SV, NE ugualmente lontane dal centro O; onde i triangoli RST, MNZ son' uguali; e così degli altri.

515. COROLLARIO II. *Qualsivoglia ungula della prima specie equivale al prodotto del suo triangolo maggiore OBD moltiplicato per i due terzi del diametro AC della sua base.*

Tutt' i triangoli, che compongono un'ungula della prima specie, sono fra loro come i circoli, che descritti farebbero dalle lor basi girando intorno l' diametro AC della base: ora, questi circoli comporrebbero una sfera, e farebbon per conseguenza uguali al maggiore moltiplicato per i due terzi del diametro AC; onde tutt' i triangoli, che compongono un'ungula, equivagliano al triangolo maggiore ABD moltiplicato per i due terzi del diametro AC.

516. COROLLARIO III. *L' altezza d' un' ungula della prima specie equivale all' altezza del triangolo maggiore.*

Si-

Simili essendo tutt'i triangoli LPQ, RST, ODB, ec. componenti l'ungula, le lor basi LP, RS, OD, ec. sono fra se come le loro altezze PQ, ST, DB, ec. Ora la base OD del massimo triangolo ODB è la più grande; dunque la sua altezza DB è altresì la maggiore, ed è per conseguenza l'altezza dell'ungula.

517. COROLLARIO IV. *L'ungule della prima spezie, che hanno le lor basi ed altezze uguali, sono uguali: quelle, che han l'altezze disuguali e le basi uguali, sono fra se come le loro altezze: quelle, che hanno l'altezze uguali e le basi disuguali, sono fra loro come le lor basi; e quelle finalmente, che han le basi reciproche all'altezze, sono uguali.*

Sieno le due ungule ABCD, AECF (Fig. 341.) di basi ed altezze uguali: i massimi triangoli BDO, EQF di queste due ungule faranno uguali, poichè la base DO equivale alla base OF, amendue essendo raggi di circoli uguali; e l'altezza DB equivale all'altezza FE, per ipotesi: ora, entrambe l'ungule sono 'l prodotto del massimo triangolo moltiplicato per i due terzi del diametro AC, che quì è lo stesso; ond' elle sono uguali.

Ora supponiamo, che le due ungule ABCD, *abcd* (Fig. 342.) abbiano uguali le lor basi ADC, *adc*, e disuguali l'altezza DB, *db*; i loro massimi triangoli ODB, *odb* avendo le lor basi OD, *od* uguali, poichè son raggi di circoli uguali, sono fra essi come le loro altezze BD, *bd*: così, essendo l'ungule fra se come i loro massimi triangoli moltiplicati per i due terzi de' diametri AC, *ac* delle lor basi, che sono uguali, faranno fra loro come le rette, od altezze BD, *bd*.

Così pure, se disuguali sono le basi ADC, *adc*, ed uguali l'altezze BD, *bd*, i massimi triangoli OBD, *obd* sono fra loro come le lor basi OD, *od*; però, essendo l'ungule tra loro come i massimi triangoli moltiplicati per i due terzi de' diametri AC, *ac*, sono fra loro come  $OD \times \frac{1}{3}AC$ ,  $od \times \frac{1}{3}ac$ : ma i due prodotti  $OD \times AC$ ,  $od \times ac$  son le metà de' quadrati de' diametri AC, *ac*, e queste metà sono fra loro come i quadrati di essi diametri, siccome lo sono pure i terzi di queste metà, e le basi ADC, *adc*; dunque l'ungule sono fra loro come le lor basi ADC, *adc*.

Finalmente, se le basi ADC, *adc* son reciproche all'altezze DB, *db*, l'ungule saranno fra loro come  $\frac{1}{2}OD \times DB \times \frac{1}{3}AC$ ,  $\frac{1}{2}od \times db \times \frac{1}{3}ac$ , o come  $OD \times DB \times AC$ ,  $od \times db \times ac$ : ora, le basi ADC, *adc* sono fra loro come  $OD \times AC$ ,  $od \times ac$ , che son le metà de' quadrati dei lor diametri; onde l'ungule saranno fra lo-

ro come  $ADC \times DB$ ,  $adc \times db$ : ma per ipotesi abbiamo  $ADC : adc :: db : DB$ ; onde facendo 'l prodotto degli estremi e quello de' medj, avremo  $ADC \times DB = adc \times db$ ; e in conseguenza le due ungue faranno uguali.

518. COROLLARIO V. *Qualsivoglia ungula cilindrica della prima spezie è alla sfera, che dalla sua base verrebbe descritta girando intorno 'l suo diametro AC ( Fig. 340. ), come la sua altezza è alla circonferenza del massimo circolo.*

Se l'altezza DB del triangolo maggiore OBD equivale alla circonferenza del massimo circolo della sfera, detto triangolo è uguale al circolo ( N. 378. ): così l'ungula e la sfera faranno uguali; la prima, per essere il prodotto del triangolo OBD pe' due terzi del diametro, e l'altra, per essere il prodotto del massimo circolo, uguale al triangolo maggiore, pe' due terzi dello stesso diametro: ma se l'altezza DB del massimo triangolo OBD è maggiore, o minor della circonferenza del massimo circolo della sfera, detto triangolo non differirà dal triangolo, uguale al massimo circolo, che nell'altezza; e conseguentemente egli farà al massimo circolo, come l'altezza DB è alla circonferenza: così l'ungula e la sfera faranno tra loro, come l'altezza DB moltiplicata per i due terzi di AC è alla circonferenza del massimo circolo moltiplicata pure per i due terzi di AC, e per conseguente come l'altezza DB è alla circonferenza del massimo circolo.

519. COROLLARIO VI. *Se un'ungula della prima spezie è segata da un piano RST ( Fig. 342. ) perpendicolare alla base APC, ed al piano inclinato ABC, le parti segate ATSR, RSTBC, faranno fra loro come i segmenti corrispondenti della sfera VAS, VCS.*

Ciò risulta ad evidenza dal precedente Corollario.

520. PROBLEMA. *Essendo un'ungula cilindrica della prima spezie segata da uno, o più piani perpendicolari alla base, ma non al piano inclinato, trovar la solidità delle differenti porzioni della stessa.*

Sia l'ungula ABCD ( Fig. 342. ) segata dal piano HMNR perpendicolare alla base ADC, e parallelo al diametro AC: questo piano sopra la base ADC sega una base ANRC, e dico; che la porzione d'ungula ANHMRC, segata dallo stesso, è all'ungula, come il solido descritto dalla fascia ANRC, girando intorno 'l diametro AC, è alla sfera descritta dalla base ADC girando intorno AC; il che io provo in questo modo.

Perpendicolare essendo il piano HMNR alla base ADC, egli è

parallelo a tutte l' altezze de' triangoli componenti l' ungula, perocchè anche quest' altezze son perpendicolari alla predetta base; dal che ne segue, ch'esso piano sega i triangoli colle linee parallele alle loro altezze, e ch'i triangoli componenti la porzione ANHMRC son simili fra loro ed ai triangoli componenti l' ungula, e sono in conseguenza come i quadri delle lor basi OZ, *ab*, ec. cioè come i quadri degli elementi della fascia ANCR della base ADC, o come i circoli descritti dagli stessi elementi girando intorno ad AC: così, essendo ciascun triangolo OXZ della porzione ANHMRC a ciascun triangolo OBD dell' ungula, come l' circolo descritto dalla base OZ è al circolo descritto dalla base OD, egli è agevol co'la conchiudere; che tutt'i triangoli componenti la porzione ANHMRC, ovvero la porzione ANHMRC è a tutt' i triangoli componenti l' ungula, o alla stessa ungula, come tutt' i circoli degli Elementi della fascia ANRC, o come l' solido descritto da detta fascia, r avvolgendosi intorno ad AC, è a tutt' i circoli degli Elementi della base ADR dell' ungula, o alla sfera.

Si proverà nello stesso modo, che la porzione ANHMRC ( Fig. 343. ) segata da un piano HNRM perpendicolare alla base ADC dell' ungula, ma non parallelo al diametro AC, è all' ungula, come l' solido descritto dalla porzione ANRC della base, che r avvolgerebbs' intorno ad AC, è alla sfera, che descritta farebbe dalla base ADC.

Egli è evidente, che se dall' ungula togliesi la data porzione ANHMRC, il residuo farà l' altra porzione NHBMRD.

521. COROLLARIO. *Qualunque porzione ANHMRC d' un' ungula della prima spezie ABCD ( Fig. 342. 343. ), segata da un piano HNRM perpendicolare alla base ADC, è al solido descritto dalla porzione ANRC, che r avvolgerebbs' intorno l' diametro AC, come l' altezza DB dell' ungula è alla circonferenza del massimo circolo della sfera.*

L' ungula è alla sfera descritta dalla sua base, come l' altezza DB del suo massimo triangolo è alla circonferenza del circolo maggiore della sfera ( N. 518. ): ma l' ungula è alla sfera, come la porzione ANHMRC è al solido descritto dalla porzione ANRC della base ADC, che r avvolgerebbs' intorno l' diametro AC ( N. 520. ); onde la porzione ANHMRC è a questo solido, come l' altezza AB dell' ungula è alla circonferenza del massimo circolo.

522. PROBLEMA. *Trovar la solidità d' un' ungula della seconda spezie.*

Sia

Sia l'ungula  $ABCD$  ( *Fig. 344.* ), la cui base  $ADC$  è minor d'un semicircolo; egli è certo, che quest'ungula sarà pure composta d'infiniti triangoli rettangoli simili paralleli fra loro, e perpendicolari alla base  $ADC$  ed al piano inclinato  $ABC$ : così detti triangoli faranno fra loro come i quadri delle lor basi, o come i cerchi, che sarebbero descritti da queste basi; ed in conseguenza l'ungula è al solido descritto dalla sua base  $ADC$ , ravvolgendos' intorno  $AC$ , come l'altezza  $BD$  del suo triangolo maggiore è alla circonferenza del massimo circolo del solido descritto dalla base  $DO$  dello stesso triangolo: ma siccome non ci è dato l' solido descritto dalla base  $ADC$ , girando intorno  $AC$ , così non possiamo nè meno conoscere l'ungula, quando non si ricorra al metodo de' centri di gravità, di cui parleremo in progresso. Frattanto, ecco ciò che s'avrà a fare.

Prolungo il piano inclinato  $ABC$ , finchè seghi l' asse  $LM$  del cilindro in un punto  $R$ . Taglio il cilindro e'l piano inclinato con un piano  $XSVT$ , che passi pel punto  $R$ , e sia parallelo alla base del cilindro; e questo piano è un circolo segato al centro dal piano inclinato  $SBT$ : così l'ungula  $SBTX$  è della prima specie, e per conseguente, da essa levando la parte  $SXTCA$ , il residuo sarà l'ungula della seconda specie  $ABCD$ .

Taglio l'ungula  $SBTX$  con un piano  $ACZQ$  perpendicolare alla base  $SXT$ , e la porzione  $ACZQST$  è al solido, che la sua base  $ZQST$  descriverebbe girando intorno  $ST$ , come l'ungula  $SBTX$  è alla sfera, che descritta sarebbe dalla sua base ( *N. 520.* ): così io posso conoscere la parte  $ACZQST$ , e sottrarla dall'ungula  $SBTX$ , il che mi darà un residuo  $QXZCBA$ ; onde da questo residuo levando la porzione cilindrica  $QXZCAD$  uguale al prodotto della sua base  $QXZ$  per la sua altezza  $XD$ , il residuo sarà la solidità dell'ungula  $ABCD$ .

Sia l'ungula  $ABCD$  della seconda specie ( *Fig. 345.* ), la cui base  $ADC$  è maggior d'un semicircolo. Pel punto  $O$ , in cui'l suo piano inclinato  $ABC$  sega l'asse, faccio passare un piano  $GEHF$  parallelo alla base del cilindro; e conseguentemente ho un'ungula  $EBFG$  della prima specie, ch'io posso con facilità conoscere, ed a cui aggiunger debbo la porzione  $EGFCADS$ : ora, la parte  $RDSFGE$  di questa porzione è facile a conoscersi, essendo ella 'l prodotto della sua base  $RDS$  moltiplicata per la sua altezza  $DG$ ; dunque e' non mi resta che a trovar l'altra  $REFSCA$ .

Prolungo per tanto il piano inclinato, finchè seghi il lato opposto

posto del cilindro in N; il che mi dà un'ungula rovesciata della prima spezie ENFH, uguale all'ungula EBFG, per essere uguali le basi di quest'ungule, e medesima l'inclinazione de' loro piani: taglio l'ungula ENFH con un piano AVTC perpendicolare alla base, e la sua porzione AVTCFE ( N. 520. ) è facile a conoscersi. Ora la porzione cilindrica RACSFEVT, essendo 'l prodotto della sua base RSCA per la sua altezza RE, è nota; dunque, da questa porzione levando la parte AVTCFE, il residuo farà la solidità dell'altra AREFSC: così egli ci farà nota la solidità dell'ungula ABCD.

523. PROBLEMA. *Trovar la solidità d'un cilindro ABPDH ( Fig. 346. ) troncato per un piano inclinato DPHB, che passi per l'estremità B della base.*

Moltiplico la base AB del cilindro troncato per la metà della sua altezza, e 'l prodotto è la solidità cercata.

Poichè, se pel punto O, in cui 'l piano inclinato taglia l'asse RS, faccio passare un piano MDNH parallelo alla base del cilindro, egli sarà un circolo diviso in due parti uguali dal piano inclinato, che passa pel suo centro: così noi avremo due ungule della prima spezie PDHM, DBHN, le quali saranno fra loro uguali, per essere uguali le basi, e perchè i piani inclinati, facendo sopra le basi angoli uguali, formano altezze uguali MP, NB; quindi è, che a ciascuna di quest'ungule aggiugnendo la porzione cilindrica ABDHM avremo 'l cilindro AMNP uguale al cilindro troncato ABDPH: ora, il cilindro AMNP ha per altezza la linea AM metà della retta AP. Dunque, ec.

524. PROBLEMA. *Trovar la solidità d'un cilindro ABCD ( Fig. 347. ) troncato per un piano inclinato DC, che sega i due lati DA, CB del cilindro.*

Piglio la metà MX della differenza DX dell'altezza maggior DA del cilindro troncato alla minore CB; aggiugno questa differenza alla minor'altezza CB, od AX, il che mi dà la retta AM; e moltiplicando la base AB del cilindro per AM, il prodotto è la solidità cercata.

Poichè, se pel punto O, in cui 'l piano inclinato sega l'asse, faccio passare 'l circolo MN, che sarà segato per mezzo da detto piano, avrò due ungule della prima spezie PDHM, PCHN uguali, a ciascuna di cui aggiugnendo la parte comune ABCHMP, avrò 'l cilindro ABNM uguale al cilindro troncato ABCD: ora, il cilindro ABNM ha per altezza la retta AM. Dunque, ec.

525. PRO-



525. PROPOSIZIONE CXVIII. *Se un circolo ABCD (Fig. 348.) si avvolge intorno una tangente HP parallela ad uno de' suoi diametri BD, il solido da esso descritto dopo l'intera sua rivoluzione sarà uguale ad un cilindro, ch'abbia per base il circolo ABCD, e per altezza una retta uguale alla sua circonferenza.*

Supponiamo, ch'il circolo ABCD (Fig. 349.) sia uguale al circolo ABCD della figura 348; concepitico, ch'il diametro DB parallelo alla tangente PH sia diviso in un'infinità di parti uguali, e che da tutt'i punti sieno tirate delle perpendicolari alla tangente PH, le quali vadano a terminare alla circonferenza in A, S, ec. Quando'l circolo girerà intorno PH, il diametro AC perpendicolare alla tangente PH descriverà un circolo: ma gli altri Elementi SV, ec. del circolo ABCD descriveranno delle corone, poichè ST descriverà un circolo, e la sua parte VT ne descriverà un'altro; onde quello che descriverà SV sarà'l circolo descritto da ST, meno'l circolo descritto da VT, cioè una corona; e così degli altri Elementi.

Alla fine, l'estremità D, B del diametro DB parallelo alla tangente PH descriveranno delle circonferenze; ed è manifesto, ch'il solido descritto dal circolo ABCD intorno questa tangente non differirà nè dalla somma del circolo descritto dal diametro, nè dalle corone descritte dagli altri Elementi, nè finalmente dalle circonferenze descritte da' punti D, B.

Ora, sopra l'estremità A del diametro AC io alzo una retta AR perpendicolare al piano del circolo ABCD; e facendo la stessa AR uguale alla circonferenza, che descriverebbesi dal diametro AC avvolgendos' intorno a PH, tiro la retta RC; il che mi dà un triangolo CAR uguale al circolo, che dal diametro AC sarebbe descritto intorno PH (N. 378.): parimente, se sopra l'estremità della linea ST io alzo una retta SZ perpendicolare al circolo, e in conseguenza parallela ad AR, e ch'io faccia SZ uguale alla circonferenza, che da ST sarebbe descritta intorno a PH; il triangolo TSZ, ch'io formerò tirando ZT, sarà uguale al circolo descritto da ST intorno a PH; e conducendo in questo stesso triangolo la retta VX parallela ad SZ, il triangolo TVX simile al triangolo TSZ sarà uguale al circolo, che TV descriverebbe intorno PH; poichè avremo ST. SZ :: TV. VX: ma SZ è la circonferenza del raggio ST; onde VX farà quella del raggio TV, e conseguentemente TVX farà uguale al circolo del raggio TV: così'l trapezoide SZXV farà uguale alla corona, che da SV sarebbe descritta  
gi-

girando intorno PH. Però facendo lo stesso rispetto agli altri elementi del circolo ( come vedesi dalla figura ), e sopra i punti D, B alzando delle perpendicolari uguali alle circonferenze, che da detti punti farebbero descritte intorno PH, il triangolo ARC, congiunto ai trapezoidi formati sopra gli Elementi del circolo, e alle due perpendicolari alzate sopra i punti D, B, sarà uguale al circolo, che descriverebbe AC, sommato alle corone, che descritte farebbono dagli Elementi, ed alle circonferenze, che descriverebbero i punti D, B.

Ora, il solido composto del triangolo ARC, e de' trapezoidi fatti sopra gli Elementi del circolo, ed uniti alle rette sopra i punti D, B, forma un cilindro troncato, che ha per base il circolo ABCD, e per altezza la retta AR uguale alla circonferenza, che descriverebbe il diametro AC intorno PH; poichè, simili essendo e rettangoli tutt' i triangoli CAR, TSZ, TVX, gli angoli, ch'essi formano sopra PH, son'uguali; e in conseguenza le loro ipotenuse, essendo fra se parallele, formano un piano inclinato, e le loro altezze AR, SZ, VX, ec. formano la superficie d' un cilindro troncato [da detto piano; onde 'l solido compreso sotto tutte queste linee è un cilindro troncato da un piano inclinato, che passa per l'estremità della sua base. Posto dunque, che sia questo cilindro rappresentato dalla Figura 350, la sua solidità equivale alla sua base moltiplicata per la metà AM della sua altezza AR (N. 523.): ma essendo AR la circonferenza del diametro, la sua metà AM è la circonferenza del raggio CO metà del diametro, cioè la circonferenza della base; onde 'l cilindro troncato ACR, e per conseguenza il solido, che descriverebbe la base AC intorno PH, equivale alla base AC moltiplicata per la sua circonferenza.

526. Il solido descritto da un circolo ABCD ( Fig. 348. ), mentre si ravvolge intorno una tangente PH, diceasi *Anello chiuso*, perchè il voto BHCD, che ritrovasi nel mezzo, non è traforato: la parte di questo solido descritta dal semicircolo BCD appellasi *Parte interiore*: quella descritta dal semicircolo BAD si dice *Parte esteriore*; e 'l circolo ABCD chiamasi *Circolo genitor* dell'anello.

527. COROLLARIO I. La parte esteriore d' un'anello equivale alla metà del cilindro, che abbia per base il circolo genitore dell'anello, e per altezza la circonferenza, più una Sfera, ch'abbia per massimo circolo il genitore.

Il circolo AC ( Fig. 350. ), girando intorno PH, produce un'anello chiuso uguale al cilindro troncato ACR: ora, essendo tutt' i

Punti del diametro DB del semicircolo DCB equidistanti da PH, Producono, girando intorno a PH, delle circonferenze perfettamente uguali a quella del raggio CO, e per conseguente alla retta AM, o DS; onde sopra tutt'i punti di esso diametro alzando delle rette uguali a DS, e perpendicolari al circolo AC, formeranno un rettangolo DSNB, e'l solido DSNBC sarà uguale alla parte interiore dell'anello; dunque'l solido DABRNS equivarrà alla parte esterior dello stesso.

Ma questo solido è composto della parte DABNMS uguale alla metà del cilindro AT, che ha per base il circolo genitore e per altezza la circonferenza di detta base, e d'un'ungula SMNR, che ha per base il semicircolo SMN uguale al semicircolo della base AC e per altezza la retta MR; ed è uguale alla Sfera, che farebbe descritta dalla sua base girando intorno'l suo diametro (N.518.). Dunque, ec.

528. COROLLARIO II. *La parte interior d'un'anello chiuso equivale alla metà del cilindro, che abbia per base il circolo genitore, e per altezza la circonferenza, meno una Sfera, il cui massimo circolo sia'l genitore.*

La parte interior' equivale al solido DSNBC ( Fig. 350. ), cioè al semicilindro DCBNTS, meno l'ungula rovesciata SNTC uguale all'ungula SMNR. Dunque, ec.

529. PROBLEMA. *Trovar' il voto BRCS D ( Fig. 348. ), che lascia'l circolo ABCD rivolgendosi intorno la sua tangente PH.*

Dall'estremità B, D del diametro BD tiro le rette BO, DX perpendicolari alla tangente PH; il che forma un rettangolo BOXD, che girando intorno PH produce un cilindro BRSD; mentre'l semicircolo iscritto in detto rettangolo produce la parte interiore dell'anello; dunque, dal cilindro BRSD levando la parte interior dell'anello, il residuo sarà'l voto ricercato BRCS D.

NOTA. Che la metà di questo voto, cioè la parte DCS, è un cono curvilineo, il cui lato DC è un quarto di circonferenza di circolo; e che si possono conseguentemente misurar simili con, nella stessa maniera che misuranfi le piramidi curvilinee, i cui limiti sono quarti di circonferenza convessi dalla banda dell'asse, come vedremo nel Problema seguente.

530. PROBLEMA. *Trovar la solidità d'una piramide ABCDE ( Fig. 351. ), i cui limiti AE, BE, ec. sono quarti di circonferenza di circolo convessi dalla banda dell'asse OE.*

Alla base circonscrivo un circolo DABC; il che si può sempre fare,

fare, perocchè le linee AO, DO, OB, OC tirate dagli angoli della base al centro O esser debbono sempre uguali fra loro, e all' altezza OE, se pur vogliamo ch' i limiti AE, BE sieno quarti di circonferenza; e concepisco un cono, il quale per lo precedente Problema m'è noto, ch' abbia per base il circolo ABCD, e'l cui lato sia 'l limite AE.

Concepisco pure, ch' il cono e la piramide sien segati da infiniti piani paralleli alle lor basi, i quali nel cono faranno de' circoli, come LFGH, e nella piramide de' piani LFGH simili alla base, poichè le lor diagonali ed i loro lati son paralleli a quei della base; dal che n'avviene, che detti piani LFGH, ec. son parimente iscritti ne' circoli LFGH, ec. così ciascun piano LFGH della piramide sarà al circolo corrispondente LFGH del cono, come la base ABCD della piramide al circolo ABCD, ch'è la base del cono; e per conseguenza la piramide è al cono, come la base ABCD al circolo ABCD. Onde per la Regola del Tre io dico: il circolo ABCD è alla base ABCD, come'l cono è ad un quarto termine, che sarà la piramide cercata.

**DIFFINIZIONE.** Se un circolo ABCD ( Fig. 352. ) gira intorno una retta PH perpendicolare al diametro AC prolungato in O, e parallela al diametro BD, il solido descritto dopo la rivoluzione dicesi *Anello aperto*, poichè lascia intorno PH un foro BCDSQR: la parte del solido descritta dal semicircolo BAD appellasi *Parte interior dell'anello*: quella descritta dal semicircolo BAD dicesi l'*estriore*; e'l circolo ABCD si è'l genitore.

**531. PROPOSIZIONE CXIX.** *La solidità d' un'anello aperto equivale ad un cilindro, ch'abbia per base il circolo genitore ABCD, e per altezza una linea uguale alla circonferenza descritta dal suo centro X intorno a PH.*

Concepisco, ch' il circolo sia diviso ne' suoi Elementi paralleli al diametro, e prolungati fino in PH ( Fig. 353. ). Girando il circolo, dalla linea AO se ne descriverà uno intorno PH, e la sua parte OC ne descriverà un' altro; e conseguentemente il diametro AC descriverà una corona, cioè'l circolo del raggio AO, meno quello del raggio CO. Quindi, anche gli altri Elementi, come SV, descriveranno delle corone, e l' estremità D, B descriveran delle circonferenze, che unite alle corone degli Elementi formeranno insieme l'anello. Concepisco, che sopra l' estremità A sia alzata una retta AR perpendicolare al piano del circolo ABCD, e uguale alla circonfe-

ferenza, che da questo punto sarebbe descritta intorno PH; e tirando la retta RO, il triangolo ARO equivale al circolo, che la retta AO descriverebbe intorno a PH: parimente, sopra 'l punto C alzando una retta CL perpendicolare al circolo, ed uguale alla circonferenza, che sarebbe descritta dalla retta CO, il triangolo COL equivale al circolo, che sarebbe descritto da CO; e siccome questo è simile al triangolo AOR, la sua ipotenusa LO è una porzione dell'ipotenusa OR: così 'l trapezoide RACL è uguale alla corona, che descriverebbe AC; e facendo lo stesso rispetto agli altri Elementi SV, ec. s'avranno tanti trapezoidi SZKV, ec. uguali alle corone dell'anello ciascuno a ciascuna. Finalmente, sopra l'estremità D, B del diametro alzando delle rette uguali alle circonferenze da esse descritte, queste due rette congiunte ai trapezoidi faranno uguali all'anello.

Ora, tutte l'altezze di questi trapezoidi forman la superficie d'un cilindro, e l'ipotenuse RO, ZT, ec. formano un piano inclinato, che sega detta superficie, e che non passa l'estremità della base ABCD; onde tutte queste linee racchiudono un cilindro troncato da un piano inclinato, che sega i suoi lati opposti.

Supponendo però, che questo cilindro sia rappresentato dalla Figura 354, la sua solidità equivale alla sua base AC moltiplicata per l'altezza AM uguale all'altezza minore AF, più la metà MF della differenza RF dell'altezze RA, LC (N. 524.): ma  $AM = XQ$ , e a motivo de' triangoli simili RAO, QXO abbiamo  $OA \cdot AR :: OX \cdot XQ$ ; essendo dunque AR uguale alla circonferenza di AO, avremo  $XQ$  uguale alla circonferenza di OX, e per conseguente l'anello è uguale al cilindro, che ha per base il circolo genitore, e per altezza una retta uguale alla circonferenza, che dal suo centro X sarebbe descritta intorno PH.

532. COROLLARIO I. *La parte inferiore dell'anello equivale alla metà del cilindro AMNEC (Fig. 354.) uguale all'anello, meno un'angola SNLE uguale alla Sfera, il cui massimo circolo sia 'l genitore.*

Mentre il semicircolo BCD gira intorno PH, tutt'i punti del diametro DB, essendo equidistanti da PH, descrivono delle circonferenze uguali alla retta XQ. Onde sopra tutti questi punti alzando delle perpendicolari uguali ad XQ, avremo 'l parallelogrammo DSNB; e conseguentemente il solido DCBNLS è uguale alla parte interior dell'anello. Ora, perchè questo solido sia uguale al semicilindro DCBNES, mancavi un'angola NSLE, ch'abbia per base il

sc.

femicircolo NES uguale al femicircolo genitore , e per altezza la retta EL uguale alla metà della differenza RF dell' altezze RA , LC ma essendo RA uguale alla circonferenza del raggio AO , e CL uguale a quella del raggio CO , la differenza RF equivale dee alla circonferenza , che descritta sarebbe dal diametro AC , ch' è la differenza de' raggi AO , CO ; la metà MF è dunque uguale alla circonferenza della metà CX del diametro , cioè alla circonferenza ABCD ; e conseguentemente l'ungula SNEL equivale alla Sfera , che per massimo circolo abbia il genitore ( N. 518. ) . Dunque, ec.

533. COROLLARIO II. *La parte esterior dell' anello aperto equivale alla metà del cilindro AMNEC ( Fig. 354. ) , che ha per base il circolo genitore AC , più un'ungula SMNR uguale alla Sfera , il cui massimo circolo sia'l genitore.*

Per lo precedente Corollario , la parte interior dell' anello equivale alla parte cilindrica DBCNSL ; onde , poichè l' intero anello è uguale al cilindro troncato ACLR , la parte esterior dee equivalere al residuo DABNSR : ma questo residuo è composto del semicilindro DABNSM , più l' ungula SMNR uguale all' ungula SENL. Dunque, ec.

534. PROBLEMA . *Trovar la solidità del voto BCDSQR ( Fig. 352. ) d' un' anello aperto.*

Dall' estremità D , B del diametro DB parallelo alla retta HP tiro le rette BF , DZ perpendicolari ad HP , ciò che forma un rettangolo BFZD . Ora , mentre 'l circolo ABCD gira intorno HP , questo rettangolo descrive un cilindro BRSD , e'l femicircolo BCD descrive la parte interior dell' anello ; dunque , dal cilindro BRSD sottraendo la parte interiore , il residuo è la solidità del voto BCDSQR .

NOTA . Che la metà di questo voto , cioè CDSQ forma un cono troncato parallelo alla sua base pel circolo descritto da CO , e'l cui lato è un quarto di circonferenza di circolo CD , convesso dalla banda dell' asse OP ; e che per conseguente misurar li possono somiglianti coni , non meno che le piramidi troncate per un piano parallelo alle lor basi , e i cui limiti sono de' quarti di circonferenza di circolo , siccome ora vedremo nel Problema seguente .

535. PROBLEMA. *Trovar la solidità d' una piramide ABCDEFHG ( Fig. 355. ) troncata per un piano EFHG parallelo alla sua base ABCD , e li cui limiti AF , BH , ec. sono de' quarti di circonferenza di circolo convessi dalla banda dell' asse.*

Alla

Alla base ABCD io circonscrivo un circolo, e concepisco un cono troncato, ch'abbia per lato il quarto di circonferenza di circolo AF: concepisco in oltre, che'l cono e la piramide sieno tagliati da infiniti piani paralleli alle lor basi; e questi nel cono faran de' circoli, e nella piramide de' piani simili alla base ABCD. Così tutt' i circoli del cono faranno fra loro come tutt' i piani della piramide, o come'l circolo della base del cono è al piano della base della piramide: ma io conosco il cono, come si è veduto nella nota del precedente Corollario; dunque non ho che a dire: la base del cono è al cono, come la base della piramide è ad un quarto termine; che farà appunto la piramide.

536. PROBLEMA. *Trovar la solidità d' un solido a berretta, cioè d' una piramide, i cui limiti sono de' quarti di circonferenza concavi dalla banda dell' asse.*

Sia'l solido ABCDE ( Fig. 356. ), che ha per base il parallelogrammo ABCD, e i cui limiti AE, BE, ec. sono de' quarti di circonferenza concavi entro'l solido: tiro dalla base le diagonali AC, BD, e dal punto O, ov' elle si segano, innalzo perpendicolarmente alla base la retta OE, che farà l' asse del solido; poichè essendo le rette AO, OE perpendicolari fra loro, conviene, ch' abbraccino un quarto di circonferenza AE, e per la stessa ragione le rette DO, OE debbono abbracciare un quarto di circonferenza; e così dell' altre. Concepisco, ch' il solido sia segato da infiniti piani paralleli alla base, come FGHL; e tutti questi saran simili fra loro e alla base, per essere le lor diagonali come pure i loro lati paralleli ciascuno a ciascuno; ciò che rende gli angoli parimente uguali ciascuno a ciascuno ( N. 479. ), e per conseguenza i triangoli formati dalle diagonali son simili. Così questi piani faranno fra loro come i quadri delle lor diagonali FH, AC, o semidiagonali FR, AO: ma queste semidiagonali sono gli Elementi del quarto di circolo AEO; onde tutt' i piani sono fra loro come i quadri, o come i circoli descritti dagli Elementi FR, ec. che si ravvolgerebbero intorno'l raggio fisso EO. Ora detti circoli comporrebbono una semisfera, e per avere il valor della loro somma, si dee moltiplicar' il maggiore per i due terzi dell' altezza OE; dunque per avere il solido ABCD convien moltiplicare il piano maggiore ABCD per i due terzi dell' altezza OE.

NOTA. Ciò dicasi di tutte le berrette, che han per base de' poligoni regolari, siccome quello s' è detto sopra ( N. 530. 535. ) circa le piramidi, che hanno per limiti de' quarti di circonferenza

tonveffi verso l'asse, intender deesi di tutte le piramidi di tal natura, che hanno per base de' poligoni regolari.

537. DIFFINIZIONE. I Solidi composti d'uno stesso numero di facce simili ciascuna a ciascuna diconsi *Solidi simili*.

538. PROPOSIZIONE CXX. *I parallelepipedi, i prismi, o cilindri simili sono fessi come i cubi delle loro altezze o de' lati omogbi delle lor basi, o come i cubi de' circuiti di dette basi, o finalmente come quelli d'alcune linee similmente poste.*

Sieno i due parallelepidi simili AE, ae (Fig. 357.); il primo equivale al prodotto della sua base ABCD per la sua altezza AH, e'l secondo equivale a quello della sua base abcd per la sua altezza ab; i due solidi son dunque fra loro come questi prodotti: ma simili essendo le basi ABCD, abcd, elle sono fra lor come i quadri de' loro lati omologhi AB, ab; onde il primo solido è al secondo, come'l quadro  $\overline{AB}^2$  moltiplicato per l'altezza AH è al quadro  $\overline{ab}^2$  moltiplicato per l'altezza ab: ora, simili essendo le facce HABN, aban, l'altezze AH, ab sono fra loro come i lati AB, ab; però il primo solido è al secondo, come'l quadro  $\overline{AB}^2$  moltiplicato per AB è al quadro  $\overline{ab}^2$  moltiplicato per ab, cioè come'l cubo  $\overline{AB}^3$  del lato AB è al cubo  $\overline{ab}^3$  del lato omologo ab.

Ma i cubi  $\overline{AB}^3$ ,  $\overline{ab}^3$  de' lati omologhi AB, ab sono fra loro come i cubi de' lati omologhi AH, ab; dunque i solidi simili AE, ae sono altresì come i cubi della loro altezza: e si proverà nello stesso modo, ch'essi sono come i cubi de' circuiti delle lor basi, ec. a motivo ch'i circuiti delle basi simili sono fra se come i loro lati omologhi; e questa stessa dimostrazione serve per i prismi e cilindri simili, poichè le basi de' cilindri sono de' poligoni d'infiniti lati.

539. COROLLARIO 1°. *Le piramidi e i coni simili sono fra se come i cubi delle loro altezze, o de' loro lati omologbi.*

Le piramidi sono i terzi de' prismi d'uguale altezza; se dunque simili son le piramidi, simili pure sono i loro prismi, poichè l'altezze esser debbono fra se come i lati omologhi delle basi: ma i prismi simili sono come i cubi de' loro lati omologhi; onde le piramidi simili, che sono i terzi de' prismi, son pure come i cubi de' loro lati omologhi: e lo stessi dicasi de' coni simili, i quali altro non sono che piramidi, le cui basi hanno infiniti lati.



540. COROLLARIO II. *Tutte le sfere son simili, e per conseguente sono fra lor come i cubi de' loro diametri.*

La sfera ABCD (Fig. 358.) equivale al suo massimo circolo AC moltiplicato per i due terzi del diametro BD (N. 510.), e la sfera *abcd* equivale al prodotto del suo massimo circolo *ac* per i due terzi del diametro *bd*: ma simili essendo i due circoli AC, *ac*, essi sono come i quadri de' loro diametri, o de' diametri BD, *bd*; dunque la sfera ABCD è alla sfera *abcd*, come  $\overline{AC}^2 \times \frac{2}{3}AC$  ad  $\overline{ac}^2 \times \frac{2}{3}ac$ , o come  $\overline{AC}^3$  è ad  $\overline{ac}^3$ .

541. COROLLARIO III. *L'ungule simili sono fra loro come i cubi delle loro altezze, o de' diametri delle lor basi, ec.*

Se l'ungule simili ABCE, *abce* (Fig. 359.) son della prima spezie, la prima equivale al suo massimo triangolo BED moltiplicato per  $\frac{2}{3}AC$  (N. 515.), e la seconda, al suo massimo triangolo *bed* moltiplicato per  $\frac{2}{3}ac$ : ma simili essendo per ipotesi i due massimi triangoli, essi sono fra loro come i quadri  $\overline{BD}^2$ ,  $\overline{bd}^2$  delle lor basi BD, *bd*; onde l'ungule sono fra loro come  $\overline{BD}^2 \times \frac{2}{3}AC$ ,  $\overline{bd}^2 \times \frac{2}{3}ac$ , o come  $\overline{BD}^3 \times AC$ ,  $\overline{bd}^3 \times ac$ : ora BD, *bd* :: AC, *ac*; le due ungule son dunque fra loro come  $\overline{BD}^3 \times BD$ ,  $\overline{bd}^3 \times bd$ , o come  $\overline{BD}^4$ ,  $\overline{bd}^4$ .

Se l'ungule simili ABCE, *abce* (Fig. 360.) sono della seconda spezie, tal che le lor basi ABC, *abc* sien minori ciascuna d'un semicircolo, si potran sempre considerarle come porzione d'altre ungule simili della prima spezie NMRE, *nmre*, ch'avran per basi de' semicircoli; ed allora le due ABCE, *abce* saranno fra loro come l'ungule NMRE, *nmre*; perchè le basi, od i segmenti simili ABC, *abc* saranno fra se come le basi, od i semicircoli NMR, *nmr*, e l'altezze BE, *be* come l'altezze ME, *me*; dunque l'ungule ABCE, *abce* saranno fra loro come  $\overline{ME}^3$ ,  $\overline{me}^3$ , o come  $\overline{BE}^3$ ,  $\overline{be}^3$ .

Con somigliante discorso si proverà, che l'ungule simili della seconda spezie, le quali hanno per basi de' segmenti maggiori del semicircolo, sono fra se come i cubi delle loro altezze.

542. COROLLARIO. *Generalmente tutt'i solidi simili, in qualunque modo sien composti, sono fra se come i cubi de' loro lassi omologhi.*

Im-

Imperocchè, se in questi solidi piglianfi de' punti similmente posti, e che da ciascun'angolo delle lor facce si tirino delle rette a detti punti, si disciolgono i solidi in tante piramidi fra loro simili, le quali faran come i cubi de' loro lati omologhi; e per conseguenza i solidi composti di queste piramidi faranno nella stessa ragione.

*Del cambiamento de' Solidi.*

543. Dalle cose predette agevol sia comprendere, che una piramide può esser cangiata in un parallelepipedo, o prisma, la cui base sia uguale a quella della piramide, e la cui altezza sia parimente l' terzo dell' altezza della piramide; ch' un prisma, o parallelepipedo si può ridurre in piramide, e ch' una sfera può cangiarsi in un cilindro, o in un' ungula, ec. e perciò basterà, che io dia quì alcune regole generali per cangiare un solido in un' altro, o per fare un solido uguale a molti altri, o finalmente per rendere un solido simile ad un' altro.

544. PROBLEMA. *Dato un parallelepipedo AB ( Fig. 361. ) ritrovarne un' altro, che li sia uguale, e ch' abbia per altezza una data retta ac.*

Dovendo il parallelepipedo, ch' io cerco, equivalere al parallelepipedo AB, la sua altezza *ae* esser dee all' altezza AE, reciprocamente, come la base ACHD è alla base cercata *acbd* ( N. 497. ), a cui io do la dimensione *ad*, uguale alla dimensione AD della base ADCH; ed allora la base ABCD farà alla base cercata *acbd*, come l' altra dimensione AC è alla dimensione cercata *ac*; quindi io dirò: l' altezza *ae* è all' altezza AE, reciprocamente, come AG è ad un quarto termine, il quale trovato colle regole ordinarie farà la retta *ac*. Facendo dunque coll' altezza *ae* un parallelepipedo sopra la base *dacb*, il parallelepipedo *ab* farà uguale al parallelepipedo AB.

545. PROBLEMA. *Dato un parallelepipedo AB ( Fig. 361. ) ritrovarne un' altro, che li sia uguale, e ch' abbia una base data.*

Se la data base *acbd* ha una dimensione *da* uguale alla dimensione DA della base DACH, le due basi sono fra loro come le dimensioni *ac*, AC; però io dico: la base *dacb* è alla base DACH, cioè la dimensione *ac* è alla dimensione AC, reciprocamente, come l' altezza AE è ad un quarto termine, il quale trovato colle regole ordinarie mi dà l' altezza *ae*, cui debbo dare al parallelepipedo *ab*, che farà uguale al parallelepipedo AB.

*Tomo II.*

N

Ma

Ma se la data base  $dpqr$  non ha una comun dimensione colla base DACH, io la cangio in un'altra  $dacb$ , che sia uguale a  $dpqr$ , e ch'abbia la dimensione  $da$  uguale alla dimensione  $DA$ , dicendo:  $da$  è a  $dp$ , reciprocamente, come  $dr$  è a  $db$ ; poi termino il restante come prima.

NOTA. Che per dimensione si dee sempre intendere una linea perpendicolare all'altra dimensione; essendo già noto, che le dimensioni de' piani sono lunghezza e larghezza, e che queste quantità esser debbono fra loro perpendicolari.

546. PROBLEMA. *Dati due parallelepipedi AC, ac (Fig. 362.) ritrovarne un terzo, che lor sia uguale.*

Cerco di dare al parallelepipedo  $ac$  un'altezza uguale all'altezza  $AM$  del parallelepipedo  $AC$ , e però cangio prima la sua base  $am$  in un'altra  $pq$ , ch'abbia la dimensione  $dp$  uguale alla dimensione  $DA$ ; e 'l parallelepipedo  $pb$ , fatto sopra la base  $pq$  coll'altezza  $am$ , equivale al parallelepipedo  $ac$ . Ora io dico: l'altezza  $AM$ , cui dar voglio al parallelepipedo  $pb$ , è alla sua altezza  $am$ , reciprocamente, come  $pr$  è ad un quarto termine  $RF$ ; e facendo con  $RF$  una base  $RT$ , ch'abbia la dimensione  $RN = dp$ , il parallelepipedo  $RS$ , formato sopra la base  $RT$  coll'altezza  $RQ = AM$ , equivarrà al parallelepipedo  $pb$ , od  $ac$ ; e per conseguenza il parallelepipedo  $AS$  farà uguale ai due dati.

547. COROLLARIO I°. *Nella stessa maniera si può formare un parallelepipedo uguale a molti parallelepipedi, o cubi.*

548. COROLLARIO II. Per formare un parallelepipedo uguale alla somma d'un parallelepipedo e d'un prisma, la cui base sia, per modo d'esempio, un pentagono, riducafi la base del prisma in triangolo, e 'l triangolo in rettangolo; e conseguentemente il parallelepipedo, che ha per base questo rettangolo, e per altezza l'altezza del prisma, farà uguale al prisma; per lo che io non avrò a fare ch'un sol parallelepipedo uguale ai due, come sopra.

Si può similmente fare un parallelepipedo uguale a due, o più piramidi, col ridurre prima le piramidi in parallelepipedi: siccome puossi ancora formar una piramide uguale a molte altre, riducendo prima tutte le piramidi in parallelepipedi, poi facendo un parallelepipedo uguale alla somma de' parallelepipedi; quindi una piramide uguale al parallelepipedo totale, cioè triplicando l'altezza di detto parallelepipedo, mercè ch'una piramide, la quale abbia la stessa base d'un parallelepipedo e 'l triplo dell'altezza, equivale al parallelepipedo.

Null'

Null'altro io aggiugno, perocchè voglio, ch'i principianti abbiano'l contento di ritrovare da per sè moltissimi altri cambiamen-  
ti, i quali mediante le cose predette far si possono sopra i solidi.

549. PROBLEMA. *Esprimere in linee la ragione di più solidi.*

Cangio i dati solidi in tanti parallelepipedi, le cui basi abbiano una dimension comune, e l'altezza uguale; ed allora tutt'i detti parallelepipedi faranno fra loro come le dimensioni disuguali delle lor basi, e però queste dimensioni esprimeranno'l rapporto de' solidi dati.

550. PROBLEMA. *Fare un cubo, il quale sia ad un' altro in qualsivoglia ragione.*

Posto che cerchisi un cubo doppio del cubo AB ( Fig. 363. ), si piglia una retta AH doppia del lato di AC, e quindi due medie proporzionali infra AH, ed AC; il che si fa mediante'l compasso di proporzione, come vedremo in fine del presente Capitolo; e'l cubo formato sopra la prima delle due medie farà doppio del cubo AB. Poichè, chiamando  $b$  la prima delle due medie, e  $c$  la seconda, abbiamo: : AC.  $b$ .  $c$ . AH; e però  $\overline{AC}^3$  : : AC. AH ( Lib. I. N. 327. ): ma AC è la metà di AH, per la costruzione; dunque'l cubo  $\overline{AC}^3$ , od AB è la metà del cubo fatto sopra  $b$ .

Se cercasi un cubo, il quale non sia che'l terzo del cubo AB, piglio'l terzo AD del lato AC, e quindi due medie proporzionali  $m$ ,  $n$  infra AC, e AD, il che mi dà: : AC.  $m$ .  $n$ . AD; dunque  $\overline{AC}^3$  .  $m^3$  : : AC. AD: ma AC è'l triplo di AD; onde il cubo  $\overline{AC}^3$ , od AB è'l triplo del cubo formato sopra la prima media proporzionale  $m$ .

Se finalmente si cerca un cubo, il quale sia al cubo AB, come una data linea  $a$  è ad una data linea  $b$ , cerco una quarta proporzionale  $x$  alle due date linee  $b$ ,  $a$ , ed al lato AC; il che mi dà  $b$ .  $a$  : : AC.  $x$ , od  $x$ . AC : :  $a$ .  $b$ ; od AC.  $x$  : :  $b$ .  $a$ . Cerco due medie proporzionali infra AC ed  $x$ , ed ho: : AC.

$m$ .  $n$ .  $x$ ; dunque  $\overline{AC}^3$  .  $m^3$  : : AC.  $x$  : :  $b$ .  $a$ ; e per conseguenza il cubo formato sopra AC, cioè'l cubo AB è al cubo formato sopra la prima media proporzionale  $m$ , come  $b$  è ad  $a$ .

551. PROBLEMA. *Fare un cubo uguale a un dato parallelepipedo AB ( Fig. 364. ).*

Riduco la base AC del parallelepipedo in un quadro MP, che  
N 2 le

le sia uguale; e moltiplicando MP per l'altezza MQ uguale all'altezza AE del dato parallelepipedo, ho'l parallelepipedo MN uguale al parallelepipedo AB. Cerco due medie proporzionali  $m$ ,  $n$  fra 'l lato MR del quadro MP, e l'altezza MQ, od AE; e 'l cubo formato sopra la prima media  $m$  equivale al parallelepipedo MN, e per conseguenza ad AB.

Poichè, per la costruzione, abbiamo:  $MR . m . n . MQ$ ; dunque  $\overline{MR} . m^3 : MR . MQ$ ; e facendo'l prodotto degli estremi e quello de'medj, si ha  $\overline{MR} \times MQ = m^3 \times MR$ ; e dividendo'l tutto per MR, avremo  $\overline{MR} \times MQ = m^3$ : ma  $\overline{MR} \times MQ$  è'l parallelepipedo MN, od AB; ond'egli è uguale al cubo di  $m^3$ .

552. COROLLARIO. *Puossi mediante ciò rendere un cubo uguale a più cubi, parallelepipedi, piramidi, o figure di differente specie, riducendo prima ciascuna figura in un parallelepipedo uguale a tutte le date, e poscia in un cubo uguale al detto parallelepipedo.*

553. PROBLEMA. *Dati due solidi simili AC, ac (Fig. 365.) ritrovare un'altro PX uguale alla somma dei due, e a loro simile.*

Cerco un cubo uguale ai due dati solidi, e suppongo, che la linea  $s$  sia'l lato di detto cubo; cerco parimente un cubo uguale all'uno de' dati solidi, p. e. ad  $ac$ , e suppongo, che'l lato di questo cubo sia la retta  $r$ ; poi dico: il lato  $r$  è al lato  $ad$  del solido  $ac$ , come la retta  $s$  è ad un quarto termine, ch'io chiamo PQ, e che farà il lato omologo del solido, cui cerco. Dico pure: il lato  $r$  è al lato  $am$ , come'l lato  $s$  è ad un quarto termine, ch'io chiamo PR, e che farà un'altro lato omologo del solido, cui cerco. Dico finalmente: il lato  $r$  è all'altezza  $ae$ , come'l lato  $s$  è da un quarto termine PT, che farà l'altezza del solido cercato. Facendo dunque colle tre dimensioni PQ, PR, PT il solido PX, egli farà uguale ai due dati, e farà loro simile.

Poichè, per la costruzione, abbiamo  $r . ad : s . PQ$ , poi  $r . am : s . PR$ , finalmente  $r . ae : s . PT$ ; e moltiplicando insieme queste tre proporzioni, cioè gli antecedenti per gli antecedenti ed i conseguenti per i conseguenti, avremo  $r^3 . ad \times am \times ae : s^3 . PQ \times PR \times PT$ : ma  $r^3 = ad \times am \times ae$ ; dunque  $s^3 = PQ \times PR \times PT$ . Ora,  $s^3$  è'l cubo uguale ai due dati solidi; onde PQ  $\times$  PR  $\times$  PT, o'l solido PX è altresì uguale ai detti due solidi; e loro è in oltre simile, per essere le sue dimensioni PQ, PR, PT simili a quelle del picciolo solido  $ac$ .

NOTA.

## DELLE MATEMATICHE. 101

NOTA. Ometto moltissimi altri Problemi a ciò spettanti, po-  
 rocchè si possono agevolmente risolvere coi principj da me sopra  
 stabiliti.

### *Delle Superficie de' Solidi.*

554. Ne' solidi, i quali hanno una, o più basi, come le pira-  
 midi, i coni, le semisfere, i parallelepipedi, prismi, cilindri, ec.  
 per *Superficie* s'intende 'l valore de' piani, o lati curvi ascendenti,  
 senza che sieno compresi le basi; e per *Superficie totale* intendesi,  
 quando insieme co' piani e lati curvi ascendenti sono comprese an-  
 che le basi.

555. PROPOSIZIONE CXXI. *La superficie di un parallelepi-  
 pedo, d'un prisma, o d'un cilindro retto equivale al perimetro della  
 sua base moltiplicato per l'altezza del solido.*

Sia 'l parallelepipedo AB ( Fig. 361. ); altro non è la sua su-  
 perficie che la somma dei quattro rettangoli ascendenti compresi  
 fra le sue due basi: ora, ciascuno di questi rettangoli è 'l prodotto  
 della sua base per la sua altezza, ed in ciascun di loro l'altezza è  
 uguale; onde questi quattro rettangoli sono 'l prodotto delle lor  
 quattro basi AC, CH, HD, DA per l'altezza AE, cioè 'l pro-  
 dotto del perimetro, o contorno ACHD per l'altezza AE.

Lo stesso si proverà de' prismi e cilindri retti; imperocchè le ba-  
 si dei cilindri essendo de' poligoni d'infiniti lati, le loro superficie,  
 quando son retti, altro non sono ch' un' infinità di rettangoli, i qua-  
 li tutti per altezza han l'altezza del cilindro.

556. COROLLARIO I°. Per misurare la superficie d'un paral-  
 lelepipedo inclinato AC ( Fig. 366. ), e' convien necessariamente mi-  
 surar' a parte i piani ascendenti; imperocchè, quantunque succeder  
 possa, che le due facce AEFD e la sua parallela BHCO sieno an-  
 cora de' rettangoli, ciò non ostante la faccia ABHE e la sua pa-  
 rallela DOCF saran sempre de' parallelogrammi, i cui lati saranno  
 inclinati; tal che la faccia ABHE non sarà 'l prodotto della sua  
 base AC per la lunghezza AE, là dove la faccia AEFD sarà  
 uguale alla sua base AD moltiplicata per la lunghezza AE.

Lo stesso dicasi di tutt' i prismi inclinati.

557. COROLLARIO II. La medesima difficoltà ha luogo ne'  
 cilindri 'nclinati: ma tuttavolta egli pare, che si possano agevol-  
 mente misurare in questo modo. Sia 'l cilindro inclinato ABCD  
 ( Fig. 367. ); lo lego con un piano EB perpendicolare fra i lati  
 AD,

AD, BC, e che passi per l'estremità B della base inferiore AB: concepisco, che'l cilindro sia prolungato dal lato di D, e'l sego mediante un'altro piano FC parallelo al piano EB, il che mi dà un cilindro retto EBCF uguale al cilindro inclinato ABDC; poichè, essendo la parte cilindrica ABE uguale alla parte cilindrica DCF, se ad amendue le parti si somma la parte comune EBCD, s'avrà  $ABCD = EBCF$ ; onde, moltiplicando la circonferenza della base EB del retto cilindro EBCF pel lato BC, il prodotto sarà la superficie del cilindro retto EBCF, e in conseguenza dell'inclinato ABCD: ma la quistione consiste in trovare il circuito della base EB, essendo questa un'ellisse, come a suo luogo vedremo, e non più un circolo come la base AB. Però la più spedita è di misurare con un filo il contorno della predetta base.

558. PROPOSIZIONE CXXI. *La superficie di qualsivoglia piramide retta, la cui base sia un poligono regolare, equivale al perimetro della sua base moltiplicata per la metà d'una retta tirata dal vertice E perpendicolarmente sul lato, o sulla base d'una delle facce.*

Sia la piramide quadra e retta ABCD (Fig. 368.); la sua superficie è composta di quattro triangoli simili ed uguali; e per conseguente essa equivale a quattro volte il triangolo AEB: ora, detto triangolo è uguale alla sua base AB moltiplicata per la metà dell'altezza FE; dunque la superficie della piramide equivale a quattro volte la base AB, o al circuito ABCD moltiplicato per la metà di AE.

569. AVVERTIMENTO. Se si tagliasse la piramide con un piano MNOQ parallelo alla base e segante i quattro limiti ciascuno per mezzo, il perimetro MNOQ equivarrebbe alla metà del perimetro ABCD della base; imperocchè i triangoli simili EAB, EMN ci danno EA. EM :: AB. MN: ma per la costruzione abbiamo  $EM = \frac{1}{2}EA$ ; dunque  $MN = \frac{1}{2}AB$ , e così dell'altre facce. Ora, siccome'l prodotto del perimetro ABCD per la metà di EF è lo stesso che'l prodotto della metà del perimetro ABCD per l'intera retta EF, ne segue, che la superficie di qualsivoglia piramide retta e regolare equivale al prodotto del contorno medio, preso in egual distanza fra'l vertice e la base, moltiplicato per la retta EF.

570. COROLLARIO I°. *La superficie di qualunque cono retto ABC (Fig. 369.) equivale al prodotto della circonferenza AB della*

della sua base moltiplicata per la metà del lato CB, o alla circonferenza media MN moltiplicata pel lato CB.

Imperocchè, qualunque cono regolar' è una piramide regolare d'infiniti lati, e la retta tirata dal vertice C sopra la base infinitamente picciola d'uno de' triangoli, che compongono le facce, non è differente dal lato CB. Dunque, ec.

571. COROLLARIO II. Per misurare le superficie delle piramidi rette non regolari, e delle piramidi inclinate, le cui basi sono regolari, od irregolari, conviene di necessità misurare a parte ciascuna faccia dei triangoli, poichè tutti non hanno la medesima altezza. E quindi deriva, che non s'è ancora trovato'l modo di misurare la superficie d'u cono inclinaro ABC (Fig. 370.). Certuni danno per regola 1. moltiplicare la circonferenza della base AB per la metà del lato CD medio fra'l lato maggiore AC, e'l minore BC. Ma ciò non è stabilito sopra alcuna pruova Geometrica, e al più non può fare che un'approssimazione.

572. PROPOSIZIONE CXXII. La superficie d'una piramide retta e regolare troncata parallela alla sua base equivale alla somma de' perimetri ABCD, HGFE delle sue basi (Fig. 371.), moltiplicata per la metà della retta RS perpendicolare fra i due lati paralleli AB, HG dell'una delle sue facce ABGH, ovvero al perimetro MNOQ, che sega i limiti AH, GB, ec. ciascuno per mezzo, moltiplicato per la retta RS.

Retta essendo e regolare la piramide, la sua superficie troncata è composta di tanti trapezoidi uguali, quanti sono i lati, di cui è composta la base: ora, il trapezoide ABGH equivale alla somma de' suoi due lati paralleli AB, HG moltiplicata per la metà della sua altezza RS, ovvero alla retta MN, che sega per mezzo i suoi due lati non paralleli, moltiplicata per l'altezza RS (N. 386.); onde la superficie della piramide troncata equivale a tante volte l'uno, o l'altro di questi prodotti, quanti sono i lati della base; cioè, in questa figura, a quattro volte l'uno, o l'altro prodotto: ma, i lati AB, HG presi quattro volte formano i due perimetri ABCD, HGFE, e la retta MN presa quattro volte forma l' perimetro MNOQ. Dunque, ec.

573. COROLLARIO I°. La superficie d'un cono retto, troncato parallelo alla sua base, equivale alle circonferenze delle sue due basi AB, DC (Fig. 372.) moltiplicate per la metà del lato CB, o alla circonferenza media EF, che sega per mezzo ciascuno de' lati DA, CB, moltiplicata pel lato CB.

Ciò



Ciò è per se evidente, poichè un cono retto, segato parallelo alla sua base, è una piramide retta regolare d' infiniti lati segata parallela alla sua base.

574. COROLLARIO II. La superficie d' una piramide retta irregolare, segata parallela alla sua base, non può misurarsi che col prendere ciascuna faccia a parte; e lo stesso dicasi delle piramidi inclinate troncate, poichè le lor facce son sempre differenti.

575. PROPOSIZIONE CXXIII. *Se in un semicircolo ACDF iscrivasi un poligono regolare ABCDEF ( Fig. 373. ), di cui due de' suoi lati AB, EF terminino sopra l' estremità A, F del diametro AF, e che si faccia girar detto poligono intorno l' diametro fisso AF; la superficie, che descriverassi da' lati AB, BC, CD, ec. di questo poligono, sarà uguale alla circonferenza avente per raggio l' apotema OR moltiplicata pel diametro AF.*

Egli è manifesto, che i lati AB, EF descriveran delle superficie di coni; ch' i lati BC, DE, che non sono paralleli all' asse, e che non lo toccano, descriveranno delle superficie di coni segati paralleli alle lor basi; e che se trovasi un lato CD, parallelo al diametro, esso descriverà uua superficie del cilindro. Da ciascun angolo tiro delle rette BH, CM, DT, EV perpendicolari al diametro; e se dimostro, che la superficie del cono, che descrive AB, equivaglia alla retta AH compresa fra'l punto A, e la perpendicolare BH moltiplicata per la circonferenza, il cui raggio si è l' apotema OR; che la superficie segata, che descrive BC, sia uguale alla retta HM compresa fra le due perpendicolari BH, CM moltiplicata per la stessa circonferenza, e così di seguito; avrò altresì dimostrato, che la somma di tutte le superficie equivale alla somma delle parti AH, HM, MT, ec. del diametro AF, cioè ad AF moltiplicato per la circonferenza, il cui raggio sia l' apotema OR, e che conseguentemente la superficie totale descritta dai lati del poligono equivale alla superficie d' un cilindro, ch' abbia per base l' circolo, il cui raggio sarebbe OR, e per altezza il diametro AF. Ma vegniamo alla dimostrazione.

La superficie del cono descritta dal lato AB è uguale alla circonferenza della sua base, o alla circonferenza, che dalla perpendicolare BH sarebbe descritta intorno l' diametro AF, moltiplicata per la metà del lato AB ( N. 570. ); ovvero, segando AB per mezzo in R, la superficie del cono equivale alla circonferenza, che descriverebbersi dalla retta RS perpendicolare ad AF, moltiplicata pel lato AB: ora, perpendicolare essendo l' apotema OR ad AB,

AB, simili sono i triangoli rettangoli SOR, RAS, e a cagione delle parallele RS, BH, i triangoli rettangoli RAS, BAH son parimente simili; il triangolo SOR è dunque simile al triangolo BAH, e per conseguente  $BA : AH :: RO : RS$ ; e'n vece degli ultimi due termini RO, RS, ponendo le circonferenze, di cui essi farebbero i raggi, elle sono fra loro come i lor raggi; e chiamando le stesse (RO, (RS, avremo  $BA : AH :: (RO, (RS$ , e facendo 'l prodotto degli estremi e quello de' medj, avremo  $BA \times (RS = (AH \times RO$ , cioè la retta AH moltiplicata per la circonferenza dell'apotema RO uguale alla retta AB moltiplicata per la circonferenza del raggio RS, o alla superficie conica, che descriverebbe AB.

Per dimostrare lo stesso rispetto alle superficie del cono troncato, che si descriverebbero dalle reite BC, DE, ec. le quali non sono parallele al diametro AF, e ad esso non terminano, divido DE per mezzo in P, e tirando al centro la retta PO, ella è pure l'apotema del poligono; da E tiro EL parallela al diametro, e da P la retta PX perpendicolare allo stesso. Il triangolo rettangolo OPX è simile al triangolo  $mPn$ ;  $mPn$  è simile al triangolo  $nPE$ , e questo al triangolo LED; dunque simili essendo i triangoli OPX, LDE, abbiamo  $DE : LE :: TV : OP \cdot PX$ ; e'n vece di OP, PX ponendo le circonferenze, di cui elle farebbon raggi, e che noi chiameremo (OP, (PX, s'avrà  $DE : TV :: (OP \cdot PX$ ; dal che si deduce  $DE \times (PX = TV \times (OP$ . Ma  $DE \times (PX$  è la superficie del cono troncato, che descriverebbe DE girando intorno AF (N. 573.); onde questa superficie è uguale alla parte TV del diametro moltiplicata per la circonferenza, il cui raggio farebbe uguale all'apotema OP, od OR; e così dell'altre.

Quanto alla superficie, che descriverebbe il lato CD parallelo al diametro, egli è evidente, ch'essa equivarrebbe alla retta CD, od MT moltiplicata per la circonferenza, il cui raggio farebbe l'apotema OZ, od OR. Dunque, ec.

576. COROLLARIO. Se dunque si fa un cilindro  $abmn$ , la cui base  $ab$  sia 'l circolo, ch'abbia per raggio l'apotema RO, e la cui altezza  $bm$  sia uguale al diametro AF, la superficie di detto cilindro sarà uguale alla superficie, che descriverebbe il poligono ravvolgendosi intorno AF. In oltre, qualsivoglia superficie particolare descritta dall'uno de'lati, come BC, sarà uguale alla superficie della porzione del cilindro, che ha per altezza la parte HM

Tomo II.

O

del

del diametro corrispondente al lato BC ; e così dell' altre .

577. PROPOSIZIONE CXXIV. *La superficie d' una sfera ABCD ( Fig. 374. ) equivale a quella del cilindro circoscritto EFGH.*

La sfera ABCD è descritta dalla rivoluzione del diametro DAB intorno'l diametro BD : ora, potendo questo semicircolo esser considerato come un poligono d'infiniti lati , la superficie della sfera non differisce dalla somma delle superficie, ch' i lati infinitamente piccioli del poligono descrivono , girando intorno BD ; e siccome la somma di esse equivale alla circonferenza, che ha per raggio l' apotema del poligono, moltiplicata pel diametro BD ( N. 575. ), così ne segue, che la superficie della Sfera è uguale a questo prodotto : ma l' apotema d' un poligono d' infiniti lati non differisce dal raggio OA del semicircolo ; onde la superficie della Sfera è uguale alla circonferenza del raggio OA moltiplicata pel diametro BD ; e per conseguente essa equivale alla superficie del cilindro circoscritto EFGH.

578. COROLLARIO I°. *La superficie d' un segmento MBN di Sfera equivale alla superficie della porzione TVGH del cilindro circoscritto , che ha l' altezza TH uguale all' altezza XB del segmento.*

Imperocchè i lati infinitamente piccioli del poligono , compreso fra'l punto B e la perpendicolare MX , descrivono delle superficie uguali a quelle delle porzioni cilindriche, che hanno per altezze le parti del diametro corrispondenti ad essi lati ( N. 575. ) ; ond' tutte queste superficie sono insieme uguali alla superficie cilindrica , che ha per altezza la parte BX del diametro corrispondente alla somma de' lati.

579. COROLLARIO II. *La superficie d' una zona AMNC equivale alla superficie ACVT della porzione cilindrica, che ha per altezza l' altezza OX della zona.*

Ciò provasi nella stessa maniera ; e così si discorra dell' altre parti della superficie della sfera.

580. COROLLARIO III. *La superficie d' una Sfera è quadrupla del suo massimo circolo AC.*

La superficie della Sfera è uguale a quella del cilindro circoscritto EFGH, e questa alla circonferenza EF, od AC del massimo circolo moltiplicata pel diametro: ora, il massimo circolo AC equivale alla sua circonferenza moltiplicata per la metà del raggio, o pel quarto del diametro ( N. 378. ) ; dunque la superficie della

la

la Sfera è al suo massimo circolo, come la circonferenza del massimo circolo moltiplicata per lo diametro è alla medesima circonferenza moltiplicata pel quarto del diametro, e conseguentemente come 'l diametro è al suo quarto, o come 4 ad 1.

581. AVVERTIMENTO. Una Sfera può considerarsi come composta d'infinitie piramidi, le cui basi infinitamente picciole sieno sopra la superficie ed i vertici al centro della Sfera; dal che n'avviene, ch'avendo tutte queste piramidi la medesima altezza, cioè 'l raggio della Sfera, la loro somma sarà uguale alla somma delle lor basi, o alla superficie della Sfera moltiplicata per lo terzo del raggio. Ciò posto, egli è facile misurare qualsivoglia parte della Sfera.

Abbiasi p. e. a misurare il settore MBNO ( Fig. 374. ). Moltiplico la superficie MBN, ch'è la base di tutte le piramidi contenute da questo settore, pel terzo del raggio BO, e 'l prodotto è la solidità ricercata.

Parimente, per misurare il segmento sferico MBN, misuro 'l settore, e da esso ne levo il cono MON.

Così ancora, per misurare la zona sferica AMNC, ne levo il cono MON, e 'l residuo è la somma delle piramidi, ch'avrebbero i loro vertici in O, e le cui basi farebbero sopra la superficie della zona; moltiplico adunque la superficie della zona pel terzo del raggio, e al prodotto aggiugno il cono MON, il che mi dà la solidità della zona; e così in altri casi simili.

582. PROPOSIZIONE CXXV. La superficie d'un'ungula ABCE ( Fig. 375. ) è a quella della Sfera, che la sua base ABC descriverebbe girando intorno 'l diametro AC, come 'l altezza maggiore EB dell'ungula è alla circonferenza del massimo circolo della Sfera.

Supponiamo, che l'ungula sia uguale alla Sfera; l'altezza maggiore EB equivarrà dunque alla circonferenza del massimo circolo ( N. 518. ). Ora, la superficie di quest'ungula è composta d'infinitie rette alzate perpendicolarmente sopra tutt'i punti della circonferenza ABC della base, ed uguali ciascuna a ciascuna alle circonferenze, che tutt'i punti di ABC descriverebbero rivolgendosi intorno AC; imperocchè, dovunque vorrassi segar l'ungula con un piano HPL parallelo al triangolo maggiore EBO, s'avrà HP . PL : : EB. BO: ma EB è la circonferenza del raggio BO; onde HP sarà altresì la circonferenza del raggio PL; e così in altri casi. Ora, tutte le circonferenze descritte da qualunque punto della circonferenza CBA, che rivolgerebbersi 'ntorno CA formano la

superficie della Sfera; dunque la superficie dell'ungula equivale a quella della Sfera.

Che se l'ungula è minore, o maggior della Sfera, l'altezza maggior' EB farà pure maggiore, o minor della circonferenza del massimo circolo, e per conseguente HP farà eziandio maggiore, o minor della circonferenza del raggio PL, e così dell'altre; dal che ne segue, che la superficie dell'ungula farà minore, o maggior della superficie della Sfera, a misura ch'EB farà minore, o maggior della circonferenza del massimo circolo, e che conseguentemente la superficie dell'ungula farà a quella della Sfera, come l'altezza EB alla circonferenza del massimo circolo.

583. COROLLARIO I°. *Se per un piano HPL parallelo al suo triangolo maggiore si sega un'ungula della prima specie, la superficie della porzione HPLC, segata da detto piano, è alla superficie, che dalla sua base PCL verrebbe descritta, girando intorno 'l diametro, come l'altezza EB dell'ungula è alla circonferenza del massimo circolo.*

Ciò risulta ad evidenza dalla presente Proposizione.

584. COROLLARIO II. *La superficie d'un'ungula della prima specie ABCD equivale ad un rettangolo, che abbia per base il diametro AC, e per altezza una retta uguale all'altezza maggiore EB dell'ungula.*

Se l'ungula equivale alla sfera, la sua superficie è parimente uguale a quella della Sfera: ora, la superficie della Sfera equivale a quella del cilindro circonscritto, e questa alla circonferenza del massimo circolo moltiplicata pel diametro CA; se dunque si piglia una retta CT uguale alla circonferenza del massimo circolo, ovvero all'altezza EB dell'ungula, il rettangolo fatto sotto CT e'l diametro AC farà uguale alla superficie del cilindro, della Sfera, o dell'ungula.

Che se l'ungula è minore, o maggior della Sfera, la sua superficie farà a quella della Sfera, o al rettangolo AT, come l'altezza EB alla circonferenza del massimo circolo, o alla retta CT; onde prendendo una linea minore, o maggior di CT, e con essa insieme col diametro AC formando un rettangolo AX, egli farà uguale alla superficie dell'ungula; poichè 'l rettangolo AX farà al rettangolo AT, come l'altezza BE alla circonferenza del massimo circolo uguale a CT.

585. COROLLARIO III. *La superficie dell'ungula della seconda specie sarà facile a ritrovarsi, quando si ponga attenzione a quello che s'è detto circa la loro solidità.*

Pcr

Per ritrovare e. g. la superficie dell'ungula ADCB (*Fig. 344.*) della seconda spezie, che fa parte dell'ungula SXTB della prima, scorgo, che dalla superficie dell'ungula SXTC sottrar debbo 1°. la superficie della spezie di prisma triangolare QSACZT, 2°. la superficie della porzione cilindrica QXZCAD.

Ora supponendo, che l'ungula equivaglia alla Sfera, che descrittata sarebbe dalla sua base; la sua superficie sarà uguale a quella di detta Sfera, e la superficie della spezie di prisma QSACZT sarà uguale a quella de' due segmenti sferici QSZ, ZTy; finalmente, la superficie della porzione cilindrica QXZCAD equivale alla circonferenza QXZ moltiplicata per l'altezza XD. Ma tutto ciò è facile a conoscersi; ond'egli è altresì facile di conoscere la superficie dell'ungula DACB.

Che le l'ungula SXTB non è uguale alla Sfera, la sua superficie sarà sempre a quella della Sfera, come l'altezza BX alla circonferenza del massimo circolo; e la superficie della spezie di prisma QSACTZ sarà altresì a quella de' due segmenti sferici QSZ, ZTy, come l'altezza BX è alla circonferenza del massimo circolo: così la superficie dell'ungula ADCB sarà facile a conoscersi.

Egli è parimente agevol cosa a conoscere la superficie dell'ungula ADCB (*Fig. 345.*), la cui base è maggior d'un semicircolo, ponendo attenzione a quanto s'è detto circa la sua solidità.

586. AVVERTIMENTO. Se faremo attenzione alle cose dette circa la solidità degli anelli aperti, o chiusi, troverem 1°. che la superficie d'un anello chiuso (*Fig. 348.*) formato dalla rivoluzione d'un circolo ABCD, che gira intorno una tangente fissa HP, equivale alla superficie d'un cilindro AMTC (*Fig. 350.*), ch'abbia per base il circolo genitore dell'anello, e per altezza DS la circonferenza di detto circolo. 2°. Che la superficie della parte esteriore dell'anello chiuso equivale a quella del semicilindro DABMNS (*Fig. 350.*), più la superficie dell'ungula SMNR uguale a quella della Sfera, ch'abbia per massimo circolo il genitore. 3°. Che la superficie della parte interiore del medesimo anello equivale a quella del semicilindro DCBNTS, meno la superficie dell'ungula NTSC uguale all'ungula SMNR. 4°. finalmente, che la superficie del voto BRCSO (*Fig. 348.*) è la stessa di quella della parte interiore dell'anello, e che per conseguenza la sua metà è uguale alla superficie del cono DCS, che ha per lato il quarto di circonferenza DC del circolo genitore.

Si troverà eziandio 1°. Che la superficie d'un anello aperto

to

to ( *Fig. 352.* ) fatto dalla rivoluzione d'un circolo  $ABCD$ , che gira intorno ad una linea esterior' immobile  $HP$ , equivale alla superficie d'un cilindro  $ACEM$  ( *Fig. 354.* ), che ha per base il circolo genitore, e per altezza la retta  $XQ$  uguale alla circonferenza, che dal centro  $X$  del circolo genitore viene descritta intorno  $HP$ . 2°. Che la superficie della parte esteriore del medesimo anello è uguale alla superficie del semicilindro  $DABNS$ , più quella d'un ungula  $SMNR$  uguale ad una Sfera, ch' abbia per massimo circolo il genitore. 3°. Che la superficie della parte interior' equivale alla superficie del semicilindro  $DCBNES$ , meno la superficie dell' ungula  $NESL$  uguale all' ungula  $SNMR$ . 4°. Finalmente, che la superficie del voto  $BCDSQR$  ( *Fig. 352.* ) equivale alla superficie della parte interior dell' anello, e ch' in conseguenza la metà di detta superficie è uguale a quella d'un cono troncato  $CDSQ$ , ch' abbia per limite il quarto  $CD$  della circonferenza del circolo genitore.

**587. PROBLEMA.** *Trovare la superficie d' una piramide  $ABCDE$  ( *Fig. 351.* ), i cui limiti sono de' quarti di circoli convessi dalla banda dell' asse.*

Alla base io circonscrivo una circonferenza di circolo  $ABCD$ , e concepisco un cono, ch' abbia detto circolo per base, e l' limite  $AE$  per lato. Altro non farà la superficie di questo cono che la somma delle circonferenze, che da tutt' i punti del quarto di circolo  $AE$  si descriverebbero girando intorno l' asse  $EO$ , siccome altro non è la superficie della piramide ch' una somma di perimetri, qual' è  $FGHL$ , simili al perimetro della base  $ABCD$ , ed iscritti similmente nelle circonferenze corrispondenti: ma ogni circuito  $FGHL$  è alla circonferenza corrispondente, come l' perimetro  $ABCD$  della base della piramide alla circonferenza  $ABCD$  della base del cono. Però debbo dire: come la circonferenza  $ABCD$  della base del cono è al perimetro  $ABCD$  della base della piramide, così la somma delle circonferenze componenti la superficie, cioè la superficie del cono è alla somma de' circuiti componenti la superficie della piramide, o alla superficie della stessa piramide. Ora, la circonferenza  $ABCD$  e l' perimetro  $ABCD$  mi son noti, siccome me lo è ancora per lo precedente Avvertimento la superficie del cono; onde agevol fia conoscere la superficie della piramide.

**588. AVVERTIMENTO.** Così pure si conoscerà la superficie della piramide troncata ( *Fig. 355.* ), i cui limiti  $FA$ ,  $QB$ , ec. sono quarti di circolo convessi verso l' asse.

Quanto

## DELLE MATEMATICHE. III

Quanto sia alla berretta ( *Fig. 356.* ), che può esser considerata come una piramide, i cui limiti EA, EB sono quarti di circoli concavi verso l'asse, egli è manifesto, che girar facendo 'l quarto di circolo EOA intorno EO, descriverebbe una semisfera, in cui iscritta sarebbe la berretta. Ora, la superficie di questa semisfera altro non sarebbe se non se la somma delle circonferenze, che da tutt' i punti di EA si descriverebbono intorno EO, siccome altro non sarebbe la superficie della berretta ch' una somma di perimetri, qual' è LFGH, simili al perimetro ABCD della base, ed iscritti similmente nelle circonferenze corrispondenti. Ond' egli si dirà: come la circonferenza della base della semisfera è al perimetro ABCD della base della berretta, così la superficie della semisfera è ad un quarto termine, che farà la superficie della berretta.

*Di alcuni usi del Compasso di Proporzione necessario per l' intelligenza di quanto s' è detto nel corso del presente Libro.*

589. Ognun sa, che 'l Compasso di proporzione è composto di due lamine di rame, o d' argento, che girano intorno ad una commessura, la qual' è alla loro estremità; e che dal centro di detta commessura sono d' ambe le parti tirate delle linee sopra le due lamine, le quali han diversi nomi. Io qui non pretendo di spiegare tutti gli usi di queste differenti linee, giacchè ciò fu fatto da M<sup>o</sup> Organum in un breve Trattato, che ha per titolo: *Uso del Compasso di Proporzione*; e quindi non parlerò che del modo di trovare due medie proporzionali fra due date linee, e di quello d' iscrivere in un circolo un poligono, il quale non abbia più di dodici lati.

La linea *delle parti uguali* è così chiamata, perch' è divisa in un certo numero di particelle uguali, e può in conseguenza servire anche di scala.

La linea dei solidi è stata formata in questo modo. Fatti 64 solidi simili, o 64 cubi, i quali sieno tra loro come i numeri naturali 1. 2. 3. 4. 5. ec. fino 'l 64, si sono trasportati i lati di detti cubi sopra la linea de' solidi dall' una e dall' altra parte, cominciando sempre dal centro della commessura; talchè prendendo p. e. la lunghezza dal centro della commessura fino al numero 15, e la lunghezza dalla commessura fino al numero 20 segnato, queste due lunghezze dinotano i lati di due solidi simili, o di due cubi, i quali sarebbero fra loro come 15 a 20.

La linea de' poligoni è stata così formata. Descritto un circolo,  
in



in cui si sono iscritti li poligoni regolari dal triangolo fino al dodecagono, si sono trasportati i lati di detti poligoni sopra la linea de' poligoni, cominciando sempre dal centro della commessura; tal che la lunghezza presa p. e. dal centro fino 'l numero segnato 5, e la lunghezza presa dal centro fino 'l numero segnato 7 esprimono i lati del pentagono e dell'ettagono iscritti nello stesso circolo: ciò posto.

590. PROBLEMA. *Trovar due medie proporzionali fra due date linee a, b ( Fig. 376. )*.

Col compasso ordinario prendo la grandezza della linea *a*, e la porto sopra l'una delle linee delle parti uguali, ponendo l'una delle punte sul centro della commessura, e lasciando cader l'altra sopra detta linea, per sapere quante parti uguali contiene la linea *a*. Lo stesso io faccio rispetto alla linea *b*; e trovando p. e. che la linea *a* contiene 30 parti uguali, e che la linea *b* ne contiene 17, veggio, che queste due linee sono fra loro, come 30 a 17. Figlio altresì col compasso ordinario la grandezza della linea *a*, ed apro 'l compasso di proporzione, rappresentato quì dall'angolo BAC, finchè posta l'una delle punte del Compasso ordinario sull'uno de' punti 30 della linea de' solidi, l'altra punta cada sopra l'altro punto 30; ciò fatto, e' l Compasso di proporzione rimanendo così aperto, prendo la distanza de' punti 17, 17 della linea de' solidi, e questa distanza è la prima delle due medie proporzionali *m*, *n* ricercate. Ora, ritrovata questa, non si fa che prendere una media proporzionale *n* tra *m* e *b*, ed hassi la seconda.

Per comprenderne la ragione si rifletta, ch'essendo le quattro linee *a*, *m*, *n*, *b* in proporzione continua, aver deesi  $a^3 . m^3 : : a . b : : 30 . 17$ ; così le linee *a*, *m* esser debbono fra loro come i lati di due cubi, o di due solidi simili, che fra loro sarebbero come 30 a 17. Ora, le linee *a*, *m* sono, per la costruzione, uguali alle distanze 30, 30, e 17, 17, e a motivo de' triangoli simili 30 A 30, e 17 A 17, abbiamo 30, 30 . 17, 17 : : 30, A . 17, A; dunque  $a . m : : 30, A . 17, A : ma 30, A . e 17, A$  sono i lati di due solidi simili, ovvero di due cubi, che sono fra loro come 30 a 17; onde i cubi di *a*, *m* son parimente come 30 a 17, ed in conseguenza *m* è la prima delle due medie proporzionali ricercate.

591. PROBLEMA. *Dato un circolo ABCD ( Fig. 377. ) trovar il lato d'un poligono regolare, che li si vuole inscrivere.*

Col compasso ordinario prendo la grandezza OH del raggio del dato

dato circolo; apro'l compasso di proporzione, finchè posta la punta del compasso ordinario sull'uno de' punti 6 della linea de' poligoni, l'altra punta cada sopra l'altro punto 6; ciò fatto, e rimanendo il compasso di proporzione così aperto, se cercasi 'l lato del pentagono, ch'iscriver deesi nel dato circolo, col compasso ordinario piglio la distanza 5, 5 de' punti 5, 5 della linea de' poligoni, e questa distanza è'l lato, che si cerca, AB; poichè, per la costruzione, il raggio OH e la linea AB sono fra loro come le distanze 6, 6, e 5, 5: ma a motivo de' triangoli simili  $OR6$ ,  $SR5$  abbiamo 6, 6. 5, 5 ::  $OR$ .  $OR$ ; dunque OH. AB ::  $OR$ .  $SR$ , cioè 'l raggio OH del dato circolo è alla corda AB, come 'l lato  $OR$  dell' esagono iscritto nel circolo, che ha servito alla divisione della linea de' poligoni, è al lato  $SR$  del pentagono iscritto nello stesso circolo: ora, il lato  $OR$  dell' esagono è uguale 'al raggio del circolo, in cui 'l medesimo esagono è iscritto; però noi abbiamo: il raggio OH del dato circolo è alla sua corda AB, come 'l raggio del circolo, che ha servito per la costruzione della linea de' poligoni, è alla corda  $SR$  di detto circolo: ma la corda  $SR$  è 'l lato del pentagono iscritto nel circolo, che ha servito a costruire la linea de' poligoni; onde AB esser dee il lato del pentagono iscritto nel dato circolo.

592. AVVERTIMENTO. Quello ch'io ho detto in questo Capitolo circa i Solidi e le loro superficie fa bastevolmente scorgere, ch'io potrei molte cose soggiugnere alle già dette: ma siccome i metodi particolari, li quali converrebbe usare, farebbono troppo lunghi ed imbrogliati, così io penso di riserbare tal materia al seguente Libro, ove ne darò alcuni di generali e facili onde ritrovare la solidità e superficie d'infiniti solidi.

## CAPITOLO UNDECIMO.

*Della Misura delle Muraglie, e de' Legni.*

593. LA misura, ch'è in uso per misurare le lunghezze, è una lunghezza detta *Pertica*, o *Pertica corrente*, la quale dividesi in sei parti uguali nominate *Piedi*: ciascun piede si suddivide in 12 parti uguali chiamate *Pollici*: ciascun pollice in 12 parti uguali, che si chiamano *Linee*; ed ogni linea in 12 parti uguali dette

Tomo II.

P

Punti

*Punti*, i quali sono grandezze oltre modo picciole, che per lo più nella pratica si trascurano.

Così, contenendo la pertica corrente 6 piedi, ed ogni piede 12 pollici, egli è manifesto, che ciascuna pertica corrente contiene 6 volte 12, o 72 pollici, e che qualunque pollice contiene 12 linee; la pertica corrente dee dunque contenere 72 volte 12, ovvero 864 linee.

594. La pertica quadrata è un quadro ABCD ( Fig. 378. ), di cui la base AB e l'altezza AD vagliono ciascuna una pertica. Ora, siccome ciascun lato contiene 6 piedi, è evidente, che moltiplicando l'uno per l'altro, il prodotto 36 denota, che la pertica quadra contiene 36 piedi quadri, o 36 piccioli quadrati, i quali hanno un piè di base, ed uno d'altezza, come apparisce dalla figura; così ancora; avendo ogni piede 12 pollici di base e 12 d'altezza, ei contiene 12 volte 12, o 144 pollici quadrati, e per conseguenza la pertica quadra contener dee 36 volte 144, o 5184 pollici quadri; finalmente, avendo ogni pollice quadrato 12 linee di base e 12 d'altezza, egli contiene 12 volte 12, o 144 linee quadre: dal che n'avviene, che la pertica quadrata contiene 5184 volte 144, o 746496 linee quadre.

La pertica quadrata serve per misurare le superficie; poichè, se una superficie ha 3 pertiche di lunghezza e 2 di larghezza, moltiplicando l'una per l'altra, s' avranno 6 pertiche quadrate; cioè detta superficie conterrà 6 volte un quadro, la cui base e l'altezza sono ciascuna una pertica corrente.

595. La pertica cuba è un cubo AB ( Fig. 379. ), le cui dimensioni AC, AD della base ed altezza AE vagliono ciascuna una pertica corrente. Ora la base di questo cubo, essendo una pertica quadra, contiene 36 piè quadri, i quali moltiplicati per l'altezza AE, che vale 6 piedi, ci danno 216 piedi cubi pel valore della pertica cuba; così la pertica cuba contiene 216 piccioli cubi, come scorgesi dalla figura, le cui tre dimensioni hanno ciascuna un piede di lunghezza: parimente le due dimensioni della base di cadaun piede, essendo ciascuna di 12 pollici, producono 144 pollici quadri per base, i quali moltiplicati per l'altezza 1 piede, o 12 pollici ci danno 1728 pollici cubi pel valore del piede cubo; dal che ne segue, che la pertica cuba contiene 216 volte 1728, o 373248 pollici cubi: alla fine le dimensioni della base d'un pollice cubo, essendo ciascuna di 12 linee di lunghezza, danno di prodotto 144 linee quadre, le quali moltiplicate per l'al-

tezza 12 ci danno 1728 linee cube pel valore d'un pollice cubo. Però la pertica cuba contiene 373248 volte 1728, ovvero 644972544 linee.

La pertica cuba serve a misurare i solidi; poichè, se le due dimensioni della base d'un solido sono 4, 3, e l'altezza del solido 5, la base sarà 4 volte 3, o 12 pertiche quadre, le quali moltiplicate per le 5 dell'altezza ci daranno 60 pertiche cube.

596. Troppo imbrogliata riuscendo pel calcolo la divisione della pertica quadra in piedi, pollici e linee quadrate, non meno che quella della cuba in piedi, pollici e linee cube, s'è trovato maniera di fare, che le divisioni di queste due forte di pertiche sieno le stesse che quelle della pertica corrente; il che di gran lunga facilita 'l Calcolo. Ed ecco come s'ha fatto.

597. Sia la pertica quadra AC ( Fig. 380. ) : divido 'l lato AB in 6 parti uguali, ciascuna di cui vale per conseguenza un piede, e da' punti di divisione tiro delle parallele all'altro lato BC; il che divide la pertica in 6 rettangoli uguali, che appellansi *pie di pertica quadrata*, poichè ognuno ha un piede d'altezza, ed una pertica di base: divido pure l'altezza d'ogni piede di pertica quadra in 12 parti uguali, perocchè ciascun piede contiene 12 pollici; e da' punti di divisione tirando delle parallele alla base, ciascun piede di pertica quadrata trovasi diviso in 12 rettangoli, i quali diconsi *pollici di pertica quadrata*, perchè hanno un pollice d'altezza, ed una pertica di base: alla fine, dividendo l'altezza di ciascun pollice di pertica quadra in 12 parti uguali, e da' punti di divisione tirando delle parallele alla base, cadaun pollice di pertica quadra è diviso in 12 rettangoletti, i quali, perchè hanno una linea d'altezza, ed una pertica di base, chiamansi *linee di pertica quadrata*. Talchè la pertica quadrata contiene 6 piedi, o 72 pollici, o finalmente 864 linee di pertica quadrata; e questa maniera di dividere la pertica quadra conviene benissimo non solo al Calcolo, ma eziandio alla natura delle cose; essendo manifesto, che se si moltiplica p. e. una pertica per un piede, il prodotto non è nè un piede, nè una pertica, ma una pertica di base, e un piede d'altezza; e così in altri casi.

598. Sia parimente la pertica cuba BE ( Fig. 381. ) : divido la sua altezza AB in 6 parti uguali, e pe' punti di divisione faccio passare de' piani paralleli alla base; ciò che divide la pertica cuba in 6 parallelepipedi uguali, nomati *pie di pertica cuba*, perchè ognuno d'essi ha un piede d'altezza, ed una pertica quadrata di base.

bafe: divido altresì l'altezza di cadaun piede di pertica cuba in dodici parti uguali; e pe' punti di divisione facendo passare de' piani paralleli alla bafe, ciascun piede di pertica cuba è diviso in 12 parallelepipedi, detti *pollici di pertiche cube*, poichè hanno un pollice d'altezza, ed una pertica quadrata di bafe: alla fine, dividendo l'altezza di cadaun pollice di pertica cuba in 12 parti uguali, e pe' punti di divisione facendo passare de' piani paralleli alla bafe, ciascun pollice di pertica cuba è diviso in 12 parallelepipedi uguali, detti *linee di pertica cuba*, perchè hanno una linea d'altezza, ed una pertica quadrata di bafe; tal che la pertica cuba contiene 6 piedi, o 72 pollici, o finalmente 864 linee di pertica cuba.

Vedremo ne' fuffeguenti Esempj in qual maniera le sopr'accennate divisioni servano pel calcolo.

599. ESEMPIO I°. *Quante pertiche quadrate contiene una Muraglia di 23 pertiche, 3 piedi, 6 pollici, 6 linee di lunghezza, e 2 pertiche, 3 piedi, 6 pollici, 9 linee d'altezza?*

Scrivo'l numero da moltiplicarsi e'l moltiplicatore al solito,

cioè le pertiche sotto le pertiche, i piedi sotto i piedi, ec. e siccome'l numero 2 delle pertiche del moltiplicatore ha un sol carattere, così io moltiplico le pertiche, i piedi, i pollici e le linee del numero da moltiplicarsi per 2, dicen-

23 pert. 3 pied. 6 pol. 6 lin.

2	3	6	9	
47	1	1	0	
11	4	9	3	
1	5	9	6	$\frac{1}{2} = \frac{9}{16}$
	1	5	8	$\frac{1}{16} = \frac{9}{76}$

61 pert. 1 pied. 1 pol. 5 lin.

do: 2 volte 6 linee fan 12 linee di pertica quadra, od un pollice; scrivo zero sotto le linee, e ritengo 1: 2 volte 6 pollici fan 12, più 1, che ritengo, = 13, ovvero un piede di pertica quadra ed un pollice; scrivo un pollice, e ritengo 1: 2 volte 3 piedi fanno 6, più 1, ch'io ritengo, = 7, od una pertica quadrata ed un piede, ch'io scrivo ritenendo una pertica; e terminando il rimanente sempre con lo stesso metodo, ho 47 pertiche, 1 piede, 1 pollice, o linee per lo prodotto di 2 pertiche.

A fine di moltiplicare per 3 piedi, io dico: Se dovessi moltiplicare per una pertica, il prodotto sarebbe 23 pertiche quadrate, 3 piedi, 6 pollici e 6 linee di pertica quadra; dunque tre piedi, i quali altro non sono che la metà d'una pertica, ci debbon dare la metà di questo prodotto, cioè 11 pertiche, 4 piedi, 9 pollici

# DELLE MATEMATICHE. 117

lici e 3 linee. Poi passando a' pollici dico: sei pollici sono l' festo di tre piedi, o 36 pollici: ora, tre piedi hanno prodotto 11 pertiche, 4 piedi, 9 pollici, 3 linee; onde 6 pollici non debbono produrre che l' festo di questo prodotto, cioè 1 pertica, 5 piedi 9 pollici, 6 linee  $\frac{1}{4}$ .

Finalmente, 9 linee sono l' ottavo di 6 pollici, o 72 linee; però 9 linee debbono dar di prodotto l'ottava parte di ciò, che han prodotto 6 pollici: così, prendendo l' ottavo di 1 pertica, 5 piedi, 9 pollici, 6 linee  $\frac{1}{4}$ , ho 1 piede, 5 pollici, 8 linee  $\frac{1}{4}$ .

Faccio la somma di tutt'i prodotti ritrovati, e l' prodotto totale 61 pertic. 1 pied. 1 poll. 5 lin.  $\frac{11}{16}$  è la superficie della muraglia proposta.

600. ESEMPIO II. *Trovare il contenuto d'una superficie piana, la quale abbia 34 pertiche, 2 piedi, 9 pollici, 8 linee di larghezza, e 23 pertiche, 4 piedi, 6 pollici, 8 linee d'altezza.*

Traffuro li 2 piedi, 9 pollici, 8 linee della larghezza, per evitare l'intrigo di moltiplicarli per le 23 pertiche dell'altezza.

Moltiplicando dunque 34 x 23, ho i due prodotti 102 e 68, collocati come qui si vede.

Quattro piedi sono i due terzi d'una pertica. Ora, se si moltiplica 34 per una pertica, il prodotto sarà 34; onde moltiplicando per 4 piedi, il prodotto esser dee li due terzi di 34:

ma il terzo di 34 è 11 pertiche, 2 piedi; però io scrivo due volte questo prodotto 11 pertiche, 2 piedi.

Sei pollici sono l' quarto di 2 piedi, o 24 pollici; onde pigliando l' quarto di ciò che hanno prodotto due piedi, cioè di 11 pertiche, 2 piedi, si ha 2 pertiche, 5 piedi.

Otto linee sono la nona parte di 6 pollici, o 72 linee; però, pi-

34 pert. 2 pied. 9 pol. 8 lin.				
23	4	6	8	
102				
68				
11	2			
11	2			
2	5			
0	1	10	8	
7	5	6	2	$\frac{2}{3}$
1	5	10	6	$\frac{1}{3}$
0	5	11	3	$\frac{1}{3}$
0	0	11	10	$\frac{10}{11}$
0	0	3	11	$\frac{11}{11}$
818 pert. 5 pied. 6 pol. 8 lin. $\frac{10}{17}$				$\frac{10}{17}$

pigliando l' nono del prodotto di 6 pollici, cioè di 2 pertiche, 5 piedi, ho 0 pertiche, 1 piede, 10 pollici, 8 linee.

Ora tornando ai 2 piedi, 9 pollici, 8 linee, ch'io avea prima trascurato, dico: se dovessi moltiplicare 1 pertica per 23 pertiche, 4 piedi, 6 pollici, 8 linee, il prodotto farebbe 23 pertiche, 4 piedi, 6 pollici, 8 linee: ma non dovendo moltiplicare che per 2 piedi, i quali sono l' terzo d' una pertica, debbo avere solo il terzo di esso prodotto, cioè 7 pertiche, 5 piedi, 6 pollici, 2 linee  $\frac{2}{3}$ .

Novè pollici non sono esattamente contenuti in due piedi; però io divido 9 in due parti 6 e 3, di cui l' una 6 è l' quarto di due piedi, o 24 pollici, e l' altra 3 è la metà di 6. Ora, perchè 6 pollici sono l' quarto di 2 piedi, prendendo l' quarto del prodotto di 2 piedi, cioè di 7 pertiche, 5 piedi, 6 pollici, 2 linee  $\frac{2}{3}$ , ho una pertica, 5 piedi, 10 pollici, 6 linee  $\frac{2}{3}$ . Per 3 pollici, piglio la metà di quest' ultimo prodotto, ed ho 5 piedi, 11 pollici, 3 linee  $\frac{1}{3}$ .

Otto linee non sono esattamente contenute in 3 pollici, o 36 linee; però io divido 8 in due parti 6 e 2, di cui la prima 6 è l' sesto di 3 pollici, e l' altra 2 è l' terzo di 6. Così, prendendo l' sesto per lo prodotto di 3 pollici, ho 11 pollici, 10 linee  $\frac{2}{3}$ , e prendendo l' terzo di quest' ultimo prodotto, ho 3 piedi, 11 linee  $\frac{2}{3}$ .

Finalmente sommando tutt' i prodotti, il prodotto totale 818 pertiche, 5 piedi, 6 pollici, 6 linee  $\frac{20}{3}$ , è l' contenuto della superficie proposta.

601. Per facilitare il calcolo, è talvolta necessario far delle false supposizioni, come si vedrà nell' Esempio che segue.

602. ESEMPIO III. Trovar il valore d' una superficie, ch' abbia 32 pertiche di larghezza, e 25 pertiche, 9 pollici d' altezza.

Moltiplico prima  $32 \times 25$ , il che mi dà i due prodotti 160 e 64, disposti come nella presente Tavola si può vedere.

Ora, perchè egli farebbe troppo imbroglio l' andar cercando cosa 9 pollici sieno rispetto ad una pertica, suppongo di dover moltiplicare 32 pertiche per un piede, ch'è il sesto d' una pertica; e dico: se dovessi moltiplicare per una pertica, il prodotto fareb-

32 pert.	
25 pert. o pied. 9 pol.	
<hr/>	
160 pert.	
64	
5	2 pied.
2	4
1	2
<hr/>	
804 pert. o pied.	

etc

be 32 pertiche; dunque moltiplicando per un piede aver debbo il sesto di 32, cioè 5 pertiche, 2 piedi, ch'io scrivo con animo di poscia cancellare, perchè nel numero da moltiplicarsi non v'entran piedi.

Nove pollici non sono esattamente contenuti in un piede, o 12 pollici; però io divido 9 in 2 parti 6 e 3, di cui la prima 6 è la metà d'un piede, e l'altra 3 è la metà di 6: quindi per 6 pollici io piglio la metà di 5 pertiche, 2 piedi, il che mi dà 2 pertiche, 4 piedi; e per 3 pollici piglio la metà di 2 pertiche, 4 piedi, il che mi dà 1 pertica, 2 piedi. Cancello il prodotto 5 pertiche, 2 piedi, che mi risulta da una falsa supposizione, e facendo la somma degli altri, ho 804 pertiche pel valore della superficie proposta.

603. AVVERTIMENTO. E' degno d'osservarli, che se si cercasse d'estrarre la radice quadra da un prodotto, o da una superficie piana composta di pertiche quadrate, di piedi, pollici e linee di pertica quadra, egli non basterebbe ridurre'l tutto in linee di pertica quadra, ma in altre converrebbe ridur dette linee in linee quadrate, cioè moltiplicare le linee di pertica quadra pel numero delle linee quadrate, ch'esse contengono.

Sia'l prodotto 6 pertiche, 4 piedi, o pollici, 6 linee di pertica quadrata, di cui estrar si voglia la radice quadra. Per ciò fare riduco'l tutto in linee, il che mi dà 5766 linee di pertica quadra. Ora, siccome ciascuna di dette linee è'l prodotto d'una pertica di lunghezza per una linea d'altezza, e contenendo una pertica 864 linee, ne segue, che ciascuna linea di pertica quadrata contiene 864 linee quadre; onde, moltiplicando  $5766 \times 864$ , il prodotto è 4981824 linee quadrate, la cui radice è 2232 linee, le quali fanno 2 pertiche, 3 piedi, 6 pollici; ed in fatti, se si moltiplicano 2 pertiche, 3 piedi, 6 pollici per 2 pertiche, 3 piedi, o pollici, il prodotto sarà 6 pertiche, 4 piedi, o pollici, 6 linee, appunto secondo la proposta fatta. Ed eccone la ragione: essendo le linee di pertica quadra composte di due quantità di differenti spezie, cioè d'una pertica di lunghezza e d'una linea d'altezza, l'estrazione della lor radice non può dare nè linee, nè pertiche; e per conseguenza, se si vuole estrarne la radice, conviene di necessità ridur le linee di pertica quadrata in linee quadre, la cui altezza e lunghezza sieno della medesima spezie.

La stessa osservazione serve anche per i piedi di pertica quadra.

604. ESEMPIO IV. *Trovare il contenuto d'un solido, ch'abbia*



12 pertiche, 3 piedi, 4 pollici di lunghezza, 6 pertiche, 2 piedi 6 pollici di larghezza, e 13 pertiche, 4 piedi d'altezza.

Moltiplico la lunghezza per la larghezza, ed ho di prodotto 80 pertiche quadre, 3 piedi, 9 pollici, 11 linee di pertica quadrata, ed  $\frac{1}{2}$  di linea.

12 pert.	3 pied.	4 pol.	6 lin.	
6	2	6		
75	2	0		
4	1	1	4	
1	0	3	4	
0	0	6	3	$\frac{1}{2}$
<hr/>				
80 pert.	3 pied.	9 pol.	11 lin.	$\frac{1}{2}$
13	4			

Moltiplico questo prodotto per l'altezza 13 pertiche, 4 piedi, ed ho 102 pertiche cube, 0 piedi, 3 pollici, 11 linee di pertica cuba ed  $\frac{1}{2}$  di linea per la solidità ricercata.

605. Conviene in oltre avvertire, che se si cercasse d'estrarre la radice cuba da un pro-

dotto composto di pertiche cube, di piedi, pollici e linee di pertica cuba, dovrebbero non solo ridurre il tutto in linee di pertica cuba, ma eziandio moltiplicare queste linee pel numero delle linee cube, ch'esse contengono, ovvero per 746496; poichè, avendo la linea cuba per base una pertica quadrata del valore di 746496 linee quadre (N. 594.), e per altezza una linea, vale conseguentemente 746496 linee cube. Dopo di che s'estrarrebbe la radice cuba col solito metodo.

Che se oltre le linee di pertica cuba si trovasse una frazione di linea, p. e.  $\frac{1}{4}$ , piglierebbesi il sesto di 746496 linee quadre, ch'è il valore d'una linea di pertica cuba, e lo s'aggiugnerebbe alle linee cube, che s'avrebbero trovate facendo la riduzione; e se nel fare questa somma si trovasse una frazione di linea cuba, ridurrebbesi tutto in questa stessa frazione, ec.

Fatta

*Della Misura de' Legni da Fabbrica, da Lavoro, ec.*

606. Il legno o si considera colla sua scorza, o scorzato coll'asce e squadrato in forma di parallelepipedo assai difettofo, o finalmente squadrato con la sega. Ogni legno, che sia squadrato coll'asce, o con la sega, essendo fatto in forma di parallelepipedo, ha per base una figura quadrilatera, le cui due dimensioni, cioè la larghezza e l'altezza del legno, diconsi *dimensioni della quadratura*; e quando queste due dimensioni son disuguali, il legno si dice a due facce.

Essendo l tronco d'un arbore, ovvero i suoi rami, fatto sempre come una spezie di colonna, che va diminuendo, ha per conseguenza due basi circolari, l'una inferiore, e l'altra superiore e minor dell'inferiore. Quindi, a fine di fare una giusta compensazione, per lo più prendesi l suo diametro verso l mezzo della lunghezza. Ora siccome la scorza, per l'opere che far si vogliono con tal sorta di legni, a nulla serve, così levansi tre pollici dal diametro, e si squadra l rimanente; il che dà in vero una quadratura più grande del bisogno, perocchè l quadro del diametro è maggiore del suo circolo: ma ciò viene in altra parte compensato dai tre pollici, che si levano per la scorza, non essendovi alcun' arbore, il quale ne abbia un pollice e mezzo. Tutta volta in tal genere di contratti io penso, che sia meglio seguitare l'uso stabilito fra Mercanti, senza cercare un'esattezza Geometrica, la quale già da essi non s'intenderebbe, e perciò temerebbono, che si volessero ingannare.

607. La misura, che serve per i legni, dicesi *Travicello*. Egli è un solido AB (Fig. 382.), dicui la lunghezza AC è d'una pertica, o 6 piedi, la larghezza AD è di 12 pollici, o 1 piede, e l'altezza AH è di 6 pollici: così questo solido è di 3 piè cubi; poichè, moltiplicando la lunghezza 6 piedi per la larghezza 1 piede, il prodotto è 6 piè quadri, i quali moltiplicati per l'altezza 6 pollici, o mezzo piede ci danno 3 piè cubi. Se l'altezza AH si sega in 6 parti uguali, e che per i punti di divisione si seghi l travicello parallelo alla sua base, o in tutta la sua lunghezza, il travicello sarà diviso in 6 parti uguali, che si chiamano *piè di travicello*: così pure, dividendo l'altezza d'un piè di travicello in 12 parti uguali, e secondo queste divisioni tagliando l piede in tutta la sua lunghezza, egli sarà diviso in 12 parti uguali, che chiamansi *pollici di travicello*: alla fine, dividendo l'altezza d'un pol-

Tomo II.

Q

lice

lice di travicello in 12 parti uguali, e segando 'l pollice in tutta la sua lunghezza secondo queste stesse divisioni, s'avranno 12 linee di travicello. Le dimensioni della quadratura nel travicello sono la larghezza AD, e l'altezza AH.

608. La pertica cuba, come sopra s'è detto ( N. 595. ), contiene 216 piè cubi, e 'l travicello ne contiene 3 ; dividendo dunque  $216 \times 3$ , il quoziente 72 indica, che la pertica cuba contiene 72 travicelli, ovvero ch'essa è 72 volte maggiore del travicello. Ora, perchè la pertica cuba contiene 6 piedi, il piè 12 pollici, e 'l pollice 12 linee di pertica cuba, siccome 'l travicello contiene 6 piedi, e 'l pollice 12 linee di travicello, ne segue, che i piedi, i pollici e le linee di pertica cuba sono pure 72 volte maggiori de' piedi, de' pollici, e delle linee di travicello.

609. Dopo le cose predette egli è da per se chiaro, che se conforme 'l solito si misura un pezzo di legno, per avere la sua solidità in pertiche, piedi, pollici e linee di pertica cuba, e che quindi si moltiplichi questa solidità per 72, il prodotto farà vedere quanti travicelli contenga questo pezzo di legno: or' eccone un' Esempio.

610. ESEMPIO. *Trovat' il numero de' travicelli, che si possono trarre da un tronco d' arbore, la cui lunghezza sia di 4 pertiche, 3 piedi, e 'l cui diametro preso nel mezzo della lunghezza sia di 3 piedi, 9 pollici, 6 linee.*

Dal diametro, per la ragione sopra indicata, levo 3 pollici, ed ho 0 pertiche, 3 piedi, 6 pollici, 6 linee ; quindi, facendone 'l quadrato, dico: se dovessi moltiplicare per una pertica, il prodotto farebbe 0 pertiche, 3 piedi, 6 pollici, 6 linee ; dunque moltiplicando per 3 piedi, che sono la metà d'una pertica, non debbo aver se non se la metà di questo prodotto ; ch' è 1 piede, 9 pollici, 3 linee.

Sei pollici sono 'l sesto di tre piedi ; però pigliando 'l sesto del prodotto di tre piedi, ho 3 pollici, 6 linee  $\frac{1}{2}$ .

Per 6 linee, che sono la duodecima parte di 6 pollici, prendo 'l duodecimo del prodotto di 6 pollici, ed ho 3 linee e  $\frac{1}{4}$ . Giungo insieme tutti questi prodotti, e 'l prodotto totale 0 pertiche, 2 piedi di pertica quadrata, 1 pollice, 1 linea ed  $\frac{1}{4}$  è 'l quadro del diametro.

Moltiplico questo quadrato per la lunghezza 4 pertiche, 3 piedi, e 'l prodotto 1 pertica cuba, 3 piedi, 4 pollici, 10 linee di pertica cuba e  $\frac{11}{4}$  è la solidità del tronco.

Per sapere quanti travicelli contenga questo prodotto, il moltiplico

plico per 72, poichè la pertica cuba contiene 72 travicelli, edico:

72  $\times$  1 fa 72 travicelli; quindi per 3 piedi prendo 36, ch'è la metà di 72, e per 4 pollici, che son la nona parte di 3 piedi, piglio 'l nono di 36, ch'è 4; finalmente divido 10 linee in due parti 8 e 2, di cui la prima 8 è 'l sesto di 4 pollici, e la seconda 2 è 'l quarto di 8: così io prendo 'l sesto di 4 travicelli, il che mi dà 4 piè di travicello, e poscia 'l quarto di 4 piedi, ed ho un piè di travicello. Per  $\frac{11}{24}$  dico: due linee ci han dato un piè di travicello; dunque una linea ci dee

o pert.	3 pied.	7 pol.	6 lin.	
o	3	6	6	
o	1	9	3	$\frac{1}{2}$
	0	3	6	$\frac{11}{24}$
		0	3	$\frac{24}{24}$
o	2	1	1	$\frac{1}{24}$
4	3			
1	2	4	4	$\frac{1}{6}$
	1	0	6	$\frac{21}{24}$
1	3	4	10	$\frac{11}{24}$
72 trav.				
36				
4				
o trav. 4 pied.				
1				
6 pol.				
4				
112 trav. 5 pied. 4 pol. 1 lin.				
$\frac{11}{24}$				

dare un mezzo piede, o 6 pollici; e ciò non è che un falso supposto, ch'io dovrò poscia cancellare: ora, 6 pollici fanno 72 linee, la cui quarantottesima parte è 1 linea  $\frac{1}{2}$ ; onde moltiplicando 1 linea e  $\frac{1}{2}$  per 33, il prodotto 49 linee  $\frac{1}{2}$ , o 4 pollici, 1 linea  $\frac{1}{2}$  è ciò, che dee dar di prodotto la frazione  $\frac{11}{24}$ . Sommo tutti questi prodotti, ed ho 112 travicelli, 5 piedi, 4 pollici, 1 linea  $\frac{1}{2}$  contenuti nel tronco proposto.

611. Se 'l pezzo di legno, che si dee misurare, fosse squadrato coll'asce, o con la sega, e che disuguali fossero le sue tre dimensioni, esse si moltiplicherebbero insieme, a fine d'avere la loro solidità; e quindi moltiplicando questa per 72, s'avrebbe 'l numero de' travicelli contenuti nel pezzo di legno.

612. O si moltiplichino prima insieme le tre dimensioni, e poscia la solidità per 72, o si moltiplichino prima l'una delle dimensioni della quadratura per 72, e quindi per l'altre dimensioni, il prodotto totale farà sempre il medesimo, per essere sempre gli stessi i moltiplicatori; dal che si è dedotto

Q 2

un'

un' altro metodo , il quale , come si vedrà , molto abbrevia il calcolo .

613. Si concepisca lo stesso tronco d'arbore , che da noi fu supposto nell' Esempio precedente ; il suo diametro è 6 pertiche , 3 piedi , 6 pollici , 6 linee . Ora , prima di moltiplicarlo per se stesso , riduco i piedi in pollici , li quali aggiugnendo ai 6 , ho 42 pollici , 6 linee . Metto i 42 pollici nel posto delle pertiche , e quindi io vengo a fare lo stesso , che se moltiplicassi 42 pollici per 72 , perocchè la pertica è 72 volte maggiore del pollice . Per ciò che riguarda le 6 linee , veggio benissimo , che mettendole nel posto de' piedi , diverrebbero 144 volte maggiori , a cagione che 'l piede contiene 144 linee ; e conseguentemente queste linee , in vece d' esser moltiplicate per 72 , farebbero moltiplicate per 144 , o 2 volte 72 , il ch' è la metà di più ; però , in vece di 6 , nel posto de' piedi pongo la sua metà , cioè 3 , ed ho 42 pertiche , 3 piedi , ovvero l' equivalente di 42 pollici , 6 linee il tutto moltiplicato per 72 .

Moltiplico 42 pertiche , 3 piedi per 6 pertiche , 3 piedi , 6 pollici , 6 linee , e 'l prodotto 25 pertiche , 0 piedi , 6 pollici , 3 linee è 72 volte maggiore di quello conviene per essere il quadrato del diametro ; e in conseguenza questo prodotto è 'l quadrato del diametro moltiplicato per 72 .

Moltiplico questo prodotto per la lunghezza 4 pertiche , 3 piedi , e 'l prodotto 112 pertiche , 5 piedi , 4 pollici , 1 linea  $\frac{1}{2}$  è 72 volte maggiore di quello conviene per essere la solidità del tronco ; dunque questo prodotto è 'l numero de' travicelli contenuti in detto tronco .

42 pert. 3 pied.		6 pol. 6 lin.	
0	3		
21	1	6	
3	6	3	
0	1	19	3
25	0	6	3
4	3		
100	2	1	0
12	3	3	3 $\frac{1}{2}$
112 trav. 5 pied. 4 pol. 1 lin. $\frac{1}{2}$			

*Delle Frazioni Decimali .*

614. Se in vece di dividere la pertica in piedi , pollici e linee, ella si divide in 10 parti, ognuna delle quali sia  $\frac{1}{10}$  ; poi ciascuna decima in dieci parti, che sieno decime di decime , o centesime ; indi ciascuna centesima in dieci parti, che sieno decime di centesime , ovvero millesime, e così successivamente, le frazioni  $\frac{1}{10}$  ,  $\frac{1}{100}$  ,  $\frac{1}{1000}$  ,  $\frac{1}{10000}$  , ec. si nomineranno *Frazioni decimali* .

615. Le decime chiamansi *Prime*, le centesime si dicono *Secondo*, le millesime *Terze*, ec.

616. Per levarsi dall'impaccio de' numeratori e denominatori , scrivesi 1°, 2°, 3°, ec. in vece di  $\frac{1}{10}$  ,  $\frac{2}{10}$  ,  $\frac{3}{10}$  , ec. similmente , in vece di  $\frac{1}{100}$  ,  $\frac{2}{100}$  ,  $\frac{3}{100}$  , ec. scrivesi 1°, 2°, 3°, ec. e così a mano a mano : tal che per esprimere una quarta, scrivesi 1°; per esprimere una quinta, scrivesi 1°, ec. e finalmente, per accennare uno, due, o tre interi, si scrive 1°, 2°, 3°, ec.

617. Con tal mezzo facilmente s'evitano il tedio e le difficoltà, che sovente provansi nel calcolo ordinario delle frazioni, come ora vedremo .

618. Per ridurre 3°, 5' all'ultima spezie, cioè in prime, non si ha che scrivere 35' ; poichè 3°, 5' equivagliono a  $3\frac{5}{10}$  ; ma per ridurre  $3\frac{5}{10}$  in decime convien moltiplicare l'intero 3 per 10 , il che fa 30, poi aggiugnervi 5 , il che fa 35 , e finalmente scrivere  $\frac{35}{10}$  , ch'equivagliono a 35' ; dunque ec.

Per questa stessa ragione, se voglio ridurre 2°. 3'. 4' all'ultima sua spezie, cioè in seconde, scrivo 234' ; imperocchè per ridurre le prime, o decime 3' in centesime, le debbo moltiplicare per 10, il che si fa scrivendo 34' , mercè che'l numero 3 diviene in tal modo dieci volte maggiore di quello sarebbe, essendo solo ; e per ridurre l'intero 2° in seconde, o centesime, conviene che lo moltiplichì per 100, il che si fa ancora scrivendo 234' , a motivo che 'l numero 2 diviene in tal modo maggiore di quello dee essere . Dunque , ec.

619. Per ridurre 35' in intero, scrivesi 3°. 5' , poichè 35' equivagliono a  $\frac{35}{10}$  . Ora, per ridurre  $\frac{35}{10}$  in intero, convien dividere 35 per 10, e'l quoziente 3 denota 3 interi con un residuo  $\frac{5}{10}$  ; dunque, ec. Similmente, per ridurre 234' in intero, scrivesi 2°. 3'. 4' , a cagione che i numeri 3 e 2, per essere soli , diventano misori , il primo dieci volte , e l'altro cento . Così egli è lo stesso

fo che se avessi diviso  $234 \times 100$ , il che dà 2 interi, e quindi il 34 rimanente per 10, ciò che avrebbe dato 3 decime e 4 centesime.

620. Per sommare  $2^\circ. 3'. 4''$  con  $3^\circ. 2'. 3''$  riduconli prima entramb'i numeri all'ultima sua spezie, il che dà  $234''$  e  $323''$ ; poi facendone la somma si ha  $557''$ , ovvero  $5^\circ. 5'. 7''$ ; e per fare la somma di  $2^\circ. 3'. 4''$  con  $3^\circ. 2'. 3''$  riduconli amendue i numeri all'ultima sua spezie, il che dà  $2345''$  e  $323''$ ; ma siccome questi due numeri son di differente spezie, così e s'aggiugne un zero all'ultimo; il che fa  $3230''$ , che ancora equivagliano a  $325''$ , perocchè  $325''$  equivagliano a  $\frac{325}{100}$ , e  $3230''$  a  $\frac{3230}{100}$ , e perchè le due frazioni  $\frac{325}{100}$  e  $\frac{3230}{100}$  son simili: quindi è, che giugnendo insieme  $2345''$  e  $3250''$  la somma farà  $5595''$ , o  $5^\circ. 5'. 9''. 5'''$ .

621. Per sottrarre  $2^\circ. 3'. 4''$  da  $4^\circ. 5'. 3''$ , il tutto si riduce alle sue ultime spezie, il che dà  $234''$  e  $453''$ ; poi, facendo la sottrazione, il residuo è  $219''$ , ovvero  $2^\circ. 1'. 9''$ ; e per sottrarre  $2345''$  da  $654''$ , aggiugnesh un zero all'ultimo, il che dà  $6540''$ ; quindi, facendo la sottrazione, il residuo è  $4195''$ , o  $4^\circ. 1'. 9''. 5'''$ .

622. Per moltiplicare  $255''$  per  $32'$ , faccio la moltiplicazione al solito, il che mi dà di prodotto  $7520$ , ed unendo il carattere della prima a quel delle seconde, scrivo  $7520''$ ; imperocchè  $235''$  equivagliano a  $\frac{235}{100}$ , e  $32'$  a  $\frac{32}{10}$ : ora, per moltiplicare delle centesime per delle decime, ovvero  $100 \times 10$ , basta che aggiugna un zero, il che dà  $\frac{7520}{1000}$ ; e per esprimere delle millesime, p. e. 3, scrivo  $3''$ ; dunque, ec. Similmente, per moltiplicare  $235''$  per  $2351''$ , si fa prima l'ordinaria moltiplicazione, il che dà di prodotto  $552481''$ , poscia sommando il carattere delle seconde a quel delle terze, scrivesh  $552481''$ , e così dell'altre; imperocchè le seconde, od  $\frac{1}{100}$  moltiplicate per le terze, o  $\frac{1}{1000}$ , danno di prodotto  $\frac{1}{100000}$ , ovvero delle quinte.

623. Per dividere  $2784'' \times 232''$ , faccio la divisione al solito, ed ho 12 per quoziente; poi, dal carattere delle terze sottraendo quel delle seconde, scrivo 12, o  $1^\circ. 2'$ , imperocchè divise le terze, od  $\frac{1}{1000}$  per le seconde, od  $\frac{1}{100}$ , danno per quoziente delle decime, o delle prime, ec.

624. Questo calcolo sarebbe in sostanza così bello come lo è apparentemente, se tutte le misure ridursi ponessero in decime, poi in decime di decime, ec. ma finchè sussisteranno le divisioni, o suddivisioni ordinarie, non s'avrà alcun vantaggio, a motivo che si dovranno sempre valutare le prime, seconde, o terze, che si troveranno.

625. Sup-

Supponiamo p. e. ch'una superficie abbia 2°. 3'. 2" di larghezza, e 3°. 2'. 3" d'altezza. Per ritrovar' il valore di detta superficie debbo moltiplicare  $232^{\circ} \times 323^{\circ}$ , ed ho  $74936^{iv}$ , ovvero  $7^{\circ} . 4936^{iv}$ , o finalmente 7 pertiche quadre  $\frac{4936}{10000}$ . Ora, s'io voglio sapere quanti piè di pertica quadrata contenga questa frazione, dico per la Regola del Tre: se divisa la pertica in 10000 parti, ne ho 4936, quante ne avrò, essendo la stessa divisa in 6 piedi? E per la Regola del Tre io trovo 2 piedi ed una frazione  $\frac{9616}{10000}$ ; e per valutare questa seconda frazione conviene, ch'io moltiplichi 'l numeratore  $9616 \times 12$ , e che divida 'l prodotto per 10000; il che mi dà 11 pollici ed una frazione  $\frac{4128}{10000}$ , ch'io debbo ancora valutare; e così successivamente: ora, egli è per se manifesto, che queste valute son più faticose di quelle ch'io avrei fatte, se mi fossi servito del calcolo delle divisioni e suddivisioni ordinarie, a motivo ch'i numeratori e denominatori sono molto più grandi; dunque egli è altresì manifesto, che 'l calcolo delle decimali non apporta alcun vantaggio, e se bene ci paja nel principio d'evitare alcune difficoltà, ci troviamo necessariamente oppressi da difficoltà maggiori sul fine del calcolo.



## CAPITOLO DUODECIMO.

### DELLE SEZIONI CONICHE.

#### *Diffinizioni, e Principj.*

616. **D**Ato uno spazio ABC (Fig. 333.), terminato da una curva ABC sempre concava dalla stessa parte, con più rette MN, OP, QR, ec. fra loro parallele, e che d'ambe le parti terminino alla curva, se trovasi una retta XZ, la quale segghi le parallele ciascuna per mezzo, ella chiamasi *Diametro* della curva, quando non è perpendicolare alle parallele; ed *Asse*, quando è ad esse perpendicolare. Il punto B, in cui la linea XZ sega la curva, dicesi *Vertice* del diametro, o dell'asse; le parallele MN, OP, ec. appellansi *Doppie ordinate*; le loro metà HN, VP sono l'*ordinate*, e le parti BH, BV, ec. del diametro, o dell'asse, comprese fra 'l vertice B e ciascun' ordinata, sono l'*Affisse*. Così l'affissa dell'ordinata HN è la retta BH; quella dell'ordinata VP si è la retta BV, ec.

Se



Se da qualsivoglia punto  $M$  preso sopra la curva tirasi un'ordinata  $MH$ , ed una tangente  $MX$ , che seghi'l diametro, o l'asse prolungato in  $X$ , la parte  $XH$  di quest'asse, o diametro compreso fra la tangente  $MX$  e l'ordinata  $MH$ , dicesi la *Suttangente*; e se al medesimo punto  $M$  s'alza sopra la tangente  $MX$  una perpendicolare  $MY$ , che tagli l'asse in  $Y$ , la parte  $HY$  di quest'asse, compresa fra l'ordinata  $MH$  e la perpendicolare  $MY$ , chiamasi la *Superperpendicolare*. Mediante queste linee ed i rapporti, che esse hanno fra loro, ben si conoscono le proprietà delle curve.

627. Se intorno il lato fisso  $AB$  si fa girare un triangolo rettangolo  $ABC$  ( *Fig. 384.* ), agevol sia concepire, ch'ei descriverà un cono retto  $ACH$ , e che li suoi elementi  $DE$ ,  $FG$ , ec. paralleli alla base  $CB$  descriveranno de' circoli, i quali avran tutt' i loro centri sopra la retta  $AB$ , ch' in conseguenza sarà l'asse del cono. Ora, quindi 1°. ne segue, che se da qualsivoglia punto  $Q$  della circonferenza della base del cono tirasi una retta  $QA$  al vertice  $A$ , ella sarà interamente sopra la superficie del cono; perocchè essa altro non sarà che la retta  $CA$  del triangolo genitore  $ABC$ , quando, r avvolgendosi, giunto sarà alla posizione  $ABQ$ . 2°. Ch' in qualsivoglia punto  $D$  si tagli'l cono con un piano parallelo alla sua base, detto piano sarà un circolo; poichè non differirà dal circolo descritto dall' elemento  $DE$ . 3°. Finalmente, che se si taglia un cono con un piano perpendicolare alla base, e che passi pel centro  $B$ , la sezione sarà un triangolo; poichè, essendo l'asse  $BA$  perpendicolare alla base, egli sarà nel piano segante, il quale passerà in conseguenza pel vertice  $A$ ; e la comun sezione del piano segante e della base sarà un diametro  $CH$  della base: così, per i punti  $C$  ed  $H$  tirando al vertice le rette  $CA$ ,  $CH$ , le quali come si è detto, saran sulla superficie del cono, esse col diametro  $CH$  formeranno un triangolo simile al piano segante.

628. Se in un cono  $BAC$  ( *Fig. 385.* ) si concepisce la sezione triangolare  $BAC$ , in cui una linea  $DE$  sia parallela ad uno de' lati  $AB$ , e che mediante un piano perpendicolare al triangolo, e che passi per la linea  $DE$ , si seghi'l cono; la sezione sarà una superficie piana  $QDO$  terminata da una curva  $QDO$ , la quale dicesi *parabola*.

629. La retta  $DE$  è l'asse della parabola.

Imperocchè, se tagliasi'l cono e la parabola con infiniti piani  $MN$ , ec. paralleli alla base  $BC$  del cono, tutti questi piani, o circoli faranno perpendicolari al triangolo  $BAC$ , poichè egli lo è  
alla

alla base BC; e siccome allo stesso triangolo è altresì perpendicolare la parabola, così ne segue, che le rette RT, ec. OQ, comuni sezioni de' circoli MN, ec. BC e della parabola, saran perpendicolari al triangolo ( N. 478. ), e conseguentemente alle rette MN, BC, DE, le quali son nel piano di detto triangolo, e si segano ne' punti S, E, per cui passan le perpendicolari RT, OQ ( N. 463. ) : ora MN, ec. BC sono i diametri de' circoli, ed RT, ec. OQ le loro corde; perpendicolari essendo dunque queste corde a' loro diametri, elle son divise per mezzo in S, ec. E, e per conseguenza la retta DE, che passa per tutti detti punti, sega per mezzo le rette RT, OQ; e poichè essa è loro perpendicolare, ella è altresì l' loro asse ( N. 626. ) .

630. La proprietà principale della parabola si è, che i quadri dell' ordinate ST, EQ sono fra essi come le lor' assisse DS, DE.

Ne' circoli MN, BC, abbiamo  $\overline{ST} = MS \times SN$ , ed  $\overline{EQ} = BE \times EC$ ; dunque  $\overline{ST} : \overline{EQ} :: MS \times SN. BE \times EC$ . Ma, a cagione delle parallele AB, DE, le parallele MS, BE sono uguali; onde i rettangoli  $MS \times SN$ , e  $BE \times EC$  avendo una dimensione uguale, sono fra loro come le dimensioni disuguali SN, EC: così noi abbiamo  $\overline{ST} : \overline{EQ} :: SN. EC$ . Ora i triangoli simili DSN, DEC ci danno  $SN. EC :: DS. DE$ ; dunque  $\overline{ST} : \overline{EQ} :: DS. DE$ .

631. Se in un cono retto BAC ( Fig. 386. ) si concepisce la sezione triangolare BAC con una retta DE, che seghi i lati in modo che paralleli non sieno alla base BC, e che si tagli'l cono con un piano perpendicolare al triangolo, e che passi per la retta DE, la sezione sarà una superficie piana terminata da una curva DTPEQR, che noi chiameremo *Elisse*.

Se co' piani FG, HI, ec. paralleli alla base BC si segano il Cono e l' *Elisse*, mostreremo come nella parabola, che le comuni sezioni TR, PQ, ec. di questi piani, o circoli, e dell' *elisse* son perpendicolari alla retta DSE, che le taglia per mezzo, e che conseguentemente è l' loro asse ( N. 626. ) .

632. La proprietà principale dell' *elisse* si è, ch' i quadri dell' ordinate TS, PO sono fra loro come i rettangoli  $DS \times SE$ ,  $DO \times OE$  delle parti dell' asse, cui elle segano.

A motivo de' circoli FG, HI, abbiamo  $\overline{TS} = FS \times SG$ , e  $\overline{PO} = HO \times OI$ ; dunque  $\overline{TS} . \overline{PO} :: FS \times SG . HO \times OI$ : ora, i triangoli simili FSD, HOD ci danno  $FS . HO :: DS . DO$ ; o a cagione de' triangoli simili GSE, IOE, abbiamo  $GS . IO :: SE . OE$ ; onde moltiplicando insieme i termini di queste due proporzioni, avremo  $FS \times GS . HO \times IO :: DS \times SE . DO \times OE$ : ma egli s'è trovato  $\overline{TS} . \overline{PO} :: FS \times GS . HO \times IO$ ; dunque  $\overline{TS} . \overline{PO} :: DS \times SE . DO \times OE$ .

633. Se in un cono retto BAC (Fig. 387.) si concepisce la sezione triangolare BAC con una retta DE perpendicolare alla base BC e differente dall'asse, e che si tagli 'l cono con un piano perpendicolare al triangolo, e che passi per la retta DE, la sezione sarà una superficie piana terminata da una curva DQO, la quale dicesi *Iperbola*.

Se co' piani MN, ec. paralleli alla base BC, segansi l'iperbola e 'l cono, mostreremo come nella parabola, che le rette RT, OQ son perpendicolari a DE, che le lega per mezzo, e ch'in conseguenza è 'l loro asse (N. 626.).

Se si concepisce un cono XAZ opposto al vertice BAC, e che, prolungato il lato BA del triangolo BAC in Z, si prolunghi la retta DE fino al concorso di AZ in Z, la parte DZ di questaretta compresa fra i due coni dicesi *primo Asse dell'Iperbola*. Delsecondo poi ne parleremo a suo luogo.

634. La proprietà principale dell'iperbola si è, ch' i quadri dell'ordinate ST, EQ, ec. sono fra loro come i rettangoli SD x SZ, ED x EZ formati sotto l'assisse SD, ED e le rette SZ, EZ, ch' son l'asse ZD prolungato fino all'ordinate.

A cagione de' circoli MN, BC, abbiamo  $\overline{TS} = MS \times SN$ , e  $\overline{QE} = BE \times EC$ ; dunque  $\overline{TS} . \overline{QE} :: MS \times SN . BE \times EC$ : ma i triangoli simili MSZ, BEZ ci danno  $MS . BE :: SZ . EZ$ , e a motivo de' triangoli simili DSN, DEC abbiamo  $SN . EC :: DS . DE$ ; però moltiplicando fra loro i termini di queste due ultime proporzioni, avremo  $MS \times SN . BE \times EC :: SZ \times DS . EZ \times DE$ : ora, noi abbiain ritrovato  $\overline{TS} . \overline{QE} :: MS \times SN . BE \times EC$ ; onde  $\overline{TS} . \overline{QE} :: SZ \times DS . EZ \times DE$ .

L'al-

## DELLE MATEMATICHE. 131

L'altre proprietà delle sezioni coniche si considereranno in un piano, perocchè troppo imbroglia sarebbe, se si volessero considerare nello stesso cono.

*Della Parabola costrutta in un Piano fuori del cono.*

**635. PROBLEMA.** *Sopra un piano descrivere una parabola (Fig. 388.).*

Piglio una linea indefinita  $AB$ , ch'io chiamo la *Direttrice*: sul punto di mezzo  $C$  alzo una perpendicolare indefinita  $CS$ , su cui io prendo ad arbitrio due parti uguali  $CD$ ,  $DO$ , e chiamo 'l punto  $O$  *Fuoco*: concepisco, che sopra tutt'i punti di  $DS$  sieno alzate delle perpendicolari indefinite  $MN$ ,  $PQ$ ,  $RT$ ,  $VX$ , ec. col compasso piglio la distanza  $HC$  dalla perpendicolare  $PQ$  alla direttrice, e portando l'una delle punte del compasso sopra 'l fuoco  $O$ , con detta apertura descrivo un'arco, che seghi  $PQ$  in due punti  $P$ , e  $Q$ : piglio parimente la distanza  $LC$  dalla perpendicolare  $VX$  alla direttrice, e portando l'una delle punte del compasso al fuoco  $O$ , descrivo con ess' apertura un'arco, il quale seghi la perpendicolare in due punti  $V$ ,  $X$ : lo stesso io faccio rispetto all'altre perpendicolari, che per conseguenza tutte mi danno due punti equidistanti da  $CS$ , toltane la retta  $MN$ , la quale altro non mi dà che 'l punto  $D$ ; poichè la sua distanza  $DC$  alla direttrice essendo uguale alla distanza  $OD$ , l'arco, ch'io descriverei con questa distanza, prendendo 'l fuoco per centro, non farebbe che toccar detta perpendicolare  $MN$  in  $D$  senza tagliarla; e per quello sia l'altre perpendicolari, come  $EF$ , che segherebbero la parte  $CD$ , è evidente, che prendendo le loro distanze  $GC$  alla direttrice, e pigliando per centro il fuoco, l'arco descritto con quest'apertura non segherebbe la perpendicolare, a motivo di  $OG$  maggiore di  $GC$ . Faccio dunque passare una curva  $ZVRPDQTXV$  per tutt'i punti ritrovati, l'asse di questa curva è la retta  $DS$ , le sue ordinate sono le rette  $PH$ ,  $RO$ , ec. e le sue asisse son le rette  $DH$ ,  $DQ$ , ec. Or manca solo a far vedere, che questa curva è una parabola.

Quì vi sono due sorte d'ordinate; l'une  $VL$ ,  $ZK$ , ec. che sono al di sotto del fuoco, e l'altre, come  $PH$ , tra 'l fuoco  $O$ , e 'l vertice  $D$ . Cominciamo dalle prime.

Dal fuoco  $O$  all'estremità dell'ordinata  $VL$  tiro la retta  $OV$  (Fig. 389.), il che mi dà un triangolo rettangolo  $VOL$ , in cui  $\overline{VL} = \overline{VO} - \overline{OL}$ ; e a motivo di  $VO = LC$ , per

la costruzione, ho  $\overline{VL} = \overline{LC} - \overline{OL}$ , e facendo i quadri LB, LR di LC, ed LO, ho'l quadrato  $\overline{VL}$  uguale al gnomone, o alla squadra CBFIRO: ora, essendo la linea CL divisa in due parti CO, OL, il gnomone contiene'l quadrato RB della parte CO, più due rettangoli uguali CR, RF delle parti CO, OL (N. 140.): così, segnando per mezzo il quadrato RB colla retta MN parallela ad RE, e dando la metà di questo quadro a ciascuno de' due rettangoli, il gnomone sarà uguale a due volte il rettangolo IMNF, cioè ad IM moltiplicato per due volte IF: ma  $IM = DL$ ; imperocchè, a motivo di  $HR = CO$ , e del punto M che divide per mezzo HR come lo è CO in D, si ha  $DO = MR$ , e  $DO + OL = MR + RI = MI$ , e a cagione di  $LC = LF$ , e di  $LI = LO$ , si ha  $IF = OC$ ; dunque'l rettangolo  $IMNF = DL \times OC$ , e per conseguenza  $2IMNF = DL \times 2OC$ , cioè'l gnomone, o'l quadro dell'ordinata VL equivale all'affissa corrispondente DL moltiplicata per due volte la distanza OC dal fuoco alla direttrice, ovvero per quattro volte la distanza OD dal fuoco al vertice. Ora io proverò nello stesso modo, che'l quadro dell'ordinata ZY equivale alla sua affissa DV moltiplicata per quattro volte la distanza OD; onde i quadri dell'ordinate VL, ZV, ec. sono fra loro come le lor'affisse DL, DV, ec. moltiplicate ciascuna per 4OD, e per conseguenza come le loro affisse, a cagione del comun moltiplicatore 4OD.

Ora, tra'l fuoco O e'l vertice D sia un'ordinata PM (Fig. 390.). Da O tiro la retta OP, e nel triangolo rettangolo PMO ho  $\overline{PM} = \overline{PO} - \overline{MO} = \overline{MC} - \overline{MO}$ ; poichè, per la costruzione, ho  $PO = MC$ : faccio'l quadro CH di CM, e prendendo  $CL = MO$  faccio'l quadro CR; e conseguentemente il quadro PM equivale al gnomone MHASRL, che contiene il quadro RH della parte LM, e due rettangoli AR, RM delle parti CL, LM: colla linea QX divido per mezzo il quadrato RH; e dando a ciascun rettangolo la metà di esso quadro, il gnomone, o quadro PM equivale a due volte il rettangolo SXQA, o a  $2SX \times SA$ : ma  $SA = LM$ , ed  $LM = 2MD$ , a motivo di  $DO = DC$ , e di  $MO = CL$ ; onde'l quadro  $\overline{PM} = 2SX \times 2MD = 4SX \times MD$ , cioè'l quadro dell'ordinata PM equivale alla sua affissa MD moltiplicata per 4SX, o 4CD, o 4DO: così'l quadro dell'ordinata

nata PM è al quadro dell'ordinata VE, ch'è sotto il fuoco, come l'assisa DM moltiplicata per 4DO è all'assisa DE moltiplicata per 4DO, o come DM è a DE; dunque la curva è una parabola ( N. 630. ).

636. La retta uguale a 4DO dicesi *Parametro* dell'asse.

637. COROLLARIO 1°. La retta MN ( Fig. 388. ) *parallela all'ordinate, e che passa pel vertice D, è tangente della parabola.*

Poichè tutti gli altri punti della parabola sono, per la costruzione, al di sotto di questa retta.

NOTA. Che la parabola, che si vuol costruire mediante più punti, sarà tanto più esatta, quanto più prossime faranno fra loro le perpendicolari PQ, RT, ec. ( Fig. 388. ).

638. COROLLARIO II. Essendo dal fuoco O ( Fig. 391. ) tirata una retta OS segante la parabola in qualsivoglia punto V: dico 1°. Che se dal punto V alla direttrice tirasi una perpendicolare VT, ella sarà sempre uguale alla retta VO compresa fra la curva, e'l fuoco. 2°. Che se dal punto X della retta SO, preso fra la curva e'l fuoco, tirasi sopra la direttrice una perpendicolare XH, ella sarà maggiore della retta XO compresa tra essa, e'l fuoco. 3°. Finalmente, che se dal punto S della retta OS, preso fuori della curva, tirasi sopra la direttrice una perpendicolare SA, ella sarà più corta della retta SO compresa tra essa, e'l fuoco.

Dal punto V tiro l'ordinata VE all'asse, e per la costruzione della parabola ho  $EC = OV$ : ma a motivo delle parallele io ho  $EC = VT$ ; dunque  $VT = VO$ ; il che doveasi 1°. dimostrare.

Dal punto X tiro XR perpendicolare sopra TV; nel triangolo rettangolo VRX l'ipotenusa XV è maggiore del lato RV: ora noi abbiamo  $TV = XO$ ; onde  $TV - VR$ , cioè TR è maggiore di  $VO - VX$ , cioè di XO: ma  $TR = HX$ ; dunque HX è maggiore di XO; il che si dovea 2°. dimostrare.

Da V tiro VM perpendicolare ad SA, e nel triangolo rettangolo SMV ho MS minore di SV. ora noi abbiamo TV, od AM = VO; dunque  $AM + MS$  è minore di  $VO + VS$ , cioè AS è minor di SO; il che doveasi 3°. dimostrare.

639. COROLLARIO III. Dunque, 1°. quando la perpendicolare VT, tirata sopra la direttrice, equivale ad VO, il punto V è sopra la curva. 2°. Quandola perpendicolare XH è maggiore di XO, il punto X è tra la curva, e'l fuoco. 3°. Quando la perpendicolare SA è minore di SO, il punto S è fuori della curva.

640. PRO-

640. PROBLEMA. *Da un dato punto P ( Fig. 392. ) preso sopra la curva d'una parabola fuori del vertice A dell'asse tirar' una tangente alla parabola.*

Da P tiro l'ordinata PS, la retta PR perpendicolare alla direttrice, e la retta PO al fuoco O; giungo la retta RO, ch'io divido per mezzo in H, e per i punti P, H tirando la retta PHT, ella farà la tangente ricercata.

Poichè se vogliamo, che la retta PT tocchi la curva in qualche altro punto, ei sarà o infra P e T, come in M, o al di là, come in Z: posto dunque ch'egli sia in M, tiro da M la retta MO al fuoco, la retta MR al punto R, e la retta MV perpendicolare alla direttrice. Il triangolo RPO farà isoscele; poichè per le parallele abbiamo  $PR = NS$ , e per la costruzione della parabola  $PO = NS$ : ora, perpendicolare essendo la retta PH sopra 'l mezzo di RO, tutt'i suoi punti, come M, son' equidistanti da R, ed O; dunque  $RM = MO$ , e 'l triangolo RMO è isoscele: ma nel triangolo rettangolo RVM l'ipotenusa RM è maggiore del lato MV; onde MO è altresì maggiore di MV, e per conseguenza il punto M è fuori della parabola ( N. 639. ). Nello stesso modo si proverà, che 'l punto Z è fuori della parabola: però la retta ZT tocca la parabola solo in P.

641. COROLLARIO I°. *La suttangente TS è segata per mezzo al vertice A dell'asse.*

I triangoli rettangoli PRH, THO son simili ed uguali, a motivo dell'angolo acuto RPT uguale al suo alterno PTO, il che rende i tre angoli uguali ciascuno a ciascuno, e del lato RH uguale al lato HO; onde  $PR = TO$ : ma  $PR = NS$ ; dunque  $TO = NS$ ; e da TO levando la parte AO, e dalla retta NS la parte NA = AO, per la costruzione della parabola ho  $TA = AS$ .

642. COROLLARIO II. Dunque, per tirare una tangente da un punto P, basta tirar l'ordinata, poi prolungare l'asse di là dal vertice, finchè TA sia uguale ad AS, e finalmente tirar la retta PT, che farà la tangente ricercata.

643. COROLLARIO III. *Se sopra 'l punto del contatto P s'alza la retta PL perpendicolare alla tangente, la superperpendicolare SL equivale alla metà del parametro.*

Essendo la retta RO perpendicolare alla tangente, ella è in conseguenza parallela ed uguale a PL, a cagione delle parallele PR, LN, e la retta RN è altresì uguale a PS; onde i triangoli rettangoli PSL, RNO son simili ed uguali, ed  $SL = NO$ : ma NO è la

è la metà del parametro ( N. 636. ) ; dunque la superpendicolare SL equivale alla metà del parametro.

644. COROLLARIO IV. *Tutte le tangenti, che tirar si possono da ciascun punto della parabola, sono fra loro inclinate, e si segnano tra i punti del contatto.*

Sieno i punti del contatto H, Q ( Fig. 393. ) presi l' uno a sinistra, e l' altro a destra dell' asse ; tira l' ordinate HS, QE, e facendo  $AB = AS$ , ed  $AC = AE$ , la tangente al punto H sarà HB, e quella al punto Q sarà QC ( N. 642. ) : così, siccome queste due tangenti son' inclinate sopra l' asse, egli è manifesto, che prolungando la più corta HB, ella segnerà l' altra in un punto D, il quale sarà fra i punti del contatto H, Q.

Sieno parimente i punti del contatto H, P presi dal medesimo lato dell' asse ; tirando l' ordinate HS, PN, e facendo  $BA = AS$ , ed  $AT = AN$ , la tangente del punto H sarà BH, o BX, e quella del punto P sarà PT : ora, non può PT andar a terminare in T, ch'è più distante dal vertice A di quello sia il punto B, senza segnar BX ; nè può PT segnar BX fra B ed H, p. o in R, imperocchè se ciò fosse, converrebbe ch'ella passasse fra l' asse e l' punto H del contatto, e per conseguenza PT taglierebbe la parabola, e più non sarebbe tangente ; dunque di necessità conviene, ch'ella segni BX in qualche punto M fra i punti del contatto P, ed H.

645. COROLLARIO VI. *Una tangente PT ( Fig. 394. ) non può toccare la parabola in due punti.*

Altrimenti, se PT tocca la parabola in P ed R, la retta PR tirata fra questi due punti sarà la più corta, che tirar si possa : ora l' arco parabolico PR è una curva, e siccome per la formazione della parabola nel cono la sua concavità è sempre rivolta verso l' asse, la retta PR passerà deo. fra l' asse e la curva ; dunque PR, in vece di toccar la curva, dee segnarla ; il che è contro l' ipotesi.

646. COROLLARIO VI. *Dallo stesso punto P ( Fig. 395. ) non si possono tirare due tangenti.*

Altramente la seconda segnerà l' asse o in un punto C più vicino al vertice A che'l punto T, in cui viene segnato dalla prima tangente PT, o in un punto S più distante. Supponiamo, che lo segni in C : piglio  $AN = CA$  ; da N tiro l' ordinata NQ, e da Q pel punto C tiro la retta QC, che sarà tangente in Q, per essere la sotttangente NC doppia dell' assissa AN ( N. 641. ) ; e CQ  
pro.



prolungata segnerà PT in un punto M fra i punti del contatto P, Q ( N. 644. ). Ora la seconda tangente, tirata dal punto P al punto C, passerà necessariamente fra M e Q, perchè altrimenti ella entrerebbe nella parabola: così la stessa taglierà CM fra M e Q, e poscia in Q, il ch'è impossibile; e lo stesso si proverebbe, se la seconda tangente tagliasse l'asse in S.

647. PROPOSIZIONE CXXVI. *Tutte le linee DK (Fig. 396.) parallele all'asse AB segnano la parabola in un sol punto, e tutte le linee RT non parallele all'asse, e seganti la parabola in un punto la segano anche in un'altro.*

I quadri dell'ordinate essendo fra se come le lor' assisse, è manifesto, ch'a misura che maggiori son le assisse, maggiori sono anche i quadri dell'ordinate, e per conseguenza le stesse ordinate; così la curva della parabola vie più s'allontana dal suo asse: ora, per grande che sia la distanza DN dalla linea DK all'asse, ella è sempre la stessa, a cagione del parallelismo; dunque e' si troverà sempre qualche ordinata OF uguale a DN, e conseguentemente DK segnerà la parabola in O: dopo di che, crescendo sempre l'altre ordinate, la curva via più s'allontanerà da DK, e per conseguenza ella non verrà più tagliata da DK; il che doveasi 1.<sup>o</sup> dimostrare.

Per ipotesi, la linea RT è obliqua all'asse, e sega la parabola in R. Ora, da tutt'i punti H, X, ec. dell'arco parabolico indefinito RHXP si possono tirare delle tangenti MHN, SXQ, ec. le quali son tutte diversamente inclinate, tal che l'inferiori SXQ segnano le superiori MHN ( N. 644. ): così gli angoli NHE, QXF, ec. da esse formati coll'ordinate HE, XF tirate da punti H, X, ec. del contatto vanno crescendo, a misura ch' i punti del contatto s'allontanano dal vertice A della parabola. Necessariamente dunque e' conviene, che siavi qualche tangente, come QXS, la quale coll' ordinata XF formi un' angolo QXF maggiore dell'angolo formato dalla linea RT colla stessa ordinata: ma parallele in tal caso non essendo le rette QXS, RTS, esse si taglieranno in qualche punto S, il quale sarà fuori della parabola, per essere QXS tangente; onde la linea RT, ch'entra nella parabola in R, e che segnerà la tangente QXS in S, bisogna, che di necessità seghi la parabola in un' altro punto T.

648. DIFFINIZIONE Qualunque linea DK parallela all'asse AB ( Fig. 396. ) dicasi *Diametro* della parabola; imperocchè sempre ritrovar si possono infinite linee parallele fra loro, e terminate dall'una e dall'altra parte alla curva, le quali sien segate ciascuna per mezzo dalla linea DK; come mostriamo in altro luogo.

649. PRO.

649. PROPOSIZIONE CXXVII. Dato l'asse  $AB$  (Fig. 397.), un diametro  $PR$  e le lor tangenti  $AP$ ,  $NT$  ai vertici  $A$ ,  $N$ , il triangolo  $TOA$ , formato da queste tangenti e dall'asse, equivale al triangolo  $PON$ , formato dalle medesime tangenti, e dal diametro.

I triangoli rettangoli  $TOA$ ,  $PON$  son simili, per essere l'angolo acuto  $PNT$  uguale al suo alterno  $NTA$ : ma da  $N$  tirando l'ordinata  $NB$  all'asse si ha  $PN = AB$ , e noi abbiamo altresì  $AB = AT$  (N. 641.); però essendo il lato  $AB$  uguale al lato  $AT$ , i due triangoli sono insieme simili, ed uguali.

650. COROLLARIO. Il rettangolo  $PANB$ , fatto dalla tangente  $PA$  e dall'ordinata  $NB$  coll'asse e col diametro, equivale al triangolo  $NTB$ , fatto dall'altra tangente coll'ordinata  $NB$ , e colla sua sottangente.

Imperocchè, se a ciascuno de' triangoli uguali  $TOA$ ,  $PON$  aggiugneshi'l quadrilatero  $OANB$ , s'avrà  $PANB = NTB$ .

NOTA. Questa Proposizione e'l suo Corollario, per essere il fondamento di quasi tutto ciò che siam per dire, ricercano molta attenzione. Convien di più notare, che le tangenti  $NT$ ,  $AP$ , comprese fra l'asse e'l diametro, sono egualmente tagliate ciascuna in  $O$ , poichè i triangoli  $TOA$ ,  $PON$  simili ed uguali ci danno  $NO = OT$ , e  $PO = OA$ .

652. PROPOSIZIONE CXXVIII. Dato l'asse  $AB$  (Fig. 398.), un diametro  $PR$  e le lor tangenti  $AP$ ,  $NT$  ai vertici  $A$ ,  $N$ , se da qualsivoglia punto  $S$  preso sopra la curva tiransi due rette  $ZSX$ ,  $CD$ , parallele alle tangenti, si formeranno due triangoli, l'uno  $SZD$  coll'asse, e l'altro  $CSV$  col diametro; e dico 1°. Che'l triangolo  $SZD$ , formato dalle parallele e dall'asse, equivale al rettangolo  $PADC$ , fatto dalla tangente dell'asse e dalla sua parallela fra l'asse, e'l diametro. 2°. Che'l triangolo  $CSV$ , formato dalle stesse parallele e dal diametro, è uguale al parallelogrammo  $NTZV$ , formato dalla tangente del diametro e dalla sua parallela compresa fra l'asse, e'l diametro.

Incominciamo dal triangolo fatto coll'asse; ma s'osservi. 1°. Che'l punto, da cui tiransi le parallele, può esser preso fra'l diametro e l'asse, come'l punto  $S$ ; ed allora il triangolo fatto dalle parallele e dall'asse è  $ZSD$ . 2°. Che questo punto può esser preso di là dal diametro, come  $X$ , nel qual caso il triangolo fatto dalle parallele  $XZ$ ,  $XB$  e dall'asse è  $ZXB$ . 3°. Finalmente, che questo punto può esser preso di là dall'asse, come'l punto  $E$ ; ed in tal

Tomo II.

S

caso

caso 'l triangolo formato dalle parallele DC, DH e dall'asse è DEH. Ciò posto.

Se 'l punto è in S, già so, ch' il triangolo TNQ equivale al rettangolo PAQN ( N. 650. ): ora, a cagione delle parallele NT, SZ, ed NQ, SD, detti due triangoli son simili, e di più sono fra se come i quadri de' loro lati omologhi NQ, SD; onde

$TNQ. ZSD :: \overline{NQ}. \overline{SD}$ : ma poichè NQ, SD son' ordinate all' asse, abbiamo  $\overline{NQ}. \overline{SD} :: QA. DA$ ; dunque  $TNQ. ZSD :: QA. DA$ ; e per la medesima grandezza AP moltiplicando gli ultimi due termini, avremo  $TNQ, ZSD :: QA \times AP, DA \times AP$ : ora  $QA \times AP = PAQN$ , e  $DA \times AP = PADC$ ; però  $TNQ, ZSD :: PAQN, PADC$ : ma  $TNQ = PAQN$ ; dunque  $ZSD = PADC$ .

Così pure, se 'l punto, da cui tiransi le parallele, è X, il triangolo TNQ è simile al triangolo ZXB fatto dalle parallele ZX, XB, e dall'asse; perciò s'avrà ancora  $TNQ. ZXB :: \overline{NQ}. \overline{XB} :: QA. BA :: QA \times AP. BA \times AP :: PAQN. PABR$ : ora  $TNQ = PAQN$ ; dunque  $ZXB = PABR$ .

Finalmente, se 'l punto, da cui tiransi le parallele, fosse E, il triangolo TNQ farebbe ancora simile al triangolo DEH, fatto dalle parallele e dall'asse, a motivo dell'angolo acuto NTH uguale al suo alterno THE; ond' egli s'avrebbe pure  $TNQ. DEH :: \overline{NQ}. \overline{DE} :: QA. DA :: QA \times AP. DA \times AP :: PAQN. PADC$ : ma  $TNQ = PAQN$ ; dunque  $DEH = PADC$ . Il che doveasi 1°. dimostrare.

Ora passiamo al triangolo formato colle parallele e col diametro. 1°. Se S è 'l punto, da cui tiransi le parallele, il triangolo sarà CSV; e dico: il triangolo TNQ equivale al rettangolo PAQN: quindi da  $TNQ$  levo 'l triangolo ZSD, e dal rettangolo PAQN il rettangolo PADC uguale al triangolo ZSD, come s'è veduto, e resta  $TNLZ + SLQD = CDNQ$ ; poi tolgo la parte comune SLQD, e resta  $TNLZ = CSLN$ ; finalmente all' una e all'altra parte io sommo il triangolo NLV, ed avrò  $TNVZ = CSV$ .

2°. Se X è 'l punto, da cui tiransi le parallele, il triangolo formato colle parallele e col diametro è VXR. Ora egli s'è trovato  $ZXB = PABR$ ; dunque dal triangolo ZXB sottraendo il trian-

## DELLE MATEMATICHE. 139

triangolo ZSD, e dal rettangolo PABR il rettangolo PADC = ZSD, avremo SDBX = CDBR, e togliendone la parte comune SDBRV s'avrà XVR = CSV; ma CSV = NTZV; onde XVR = NTZV.

3°. Finalmente, se le parallele tiransi dal punto E, il triangolo formato colle parallele e col diametro sarà EKC: ora, il triangolo EDH fatto dalle stesse parallele coll'asse è uguale a PADC; però il triangolo EKC = PAHK; e sottraendo dal secondo membro il triangolo PNO, e collocando in sua vece il triangolo TOA = PON (N. 649.), avremo EKC = NTHK. Il che doveasi 2°. dimostrare.

653. COROLLARIO. Qualunque linea SX, parallela ad una tangente NT, e terminata dall'una e dall'altra parte alla curva parabolica, è divisa per mezzo in V dal diametro PR, il quale passa per lo punto del contatto.

Noi abbiain ritrovato il triangolo CSV uguale al triangolo XVR (N. 652.): ora questi due triangoli son simili, a cagione che gli angoli opposti al vertice sono uguali, e che l'angolo acuto VXR è uguale al suo alterno VSC; onde i lati di questo triangolo son'uguali, ed abbiamo SV = VX.

NOTA. Egli s'è detto dunque con ragione (N. 648.), che ciascuna linea PR parallela all'asse è un diametro; perciocchè in qualsivoglia punto N questa linea seghi la curva, non si farà che tirar'una tangente da esso punto, e quindi delle parallele a detta tangente comprese fra la curva; e sempre si proverà, che PR è un diametro; donde ne segue, che tutt'i diametri son paralleli all'asse.

654. COROLLARIO II. Dunque le metà di tutte le linee, come SV, parallele ad una tangente NT sono l'ordinate del diametro PR, che passa pel punto del contatto (N. 626.).

655. COROLLARIO III. I quadri dell'ordinate a un diametro sono fra loro come l'assisse d'esso diametro.

Sia il diametro PR (Fig. 399.), l'asse AB, le tangenti NT, AP, e le rette SM, EH ordinate al diametro PR; prolungo quest'ordinate fino all'asse, e da'punti S, E tiro delle rette SI, EL parallele alla tangente AP. Il triangolo ISM, fatto da due parallele alle tangenti e dal diametro, è dunque uguale al parallelogrammo NTOM (N. 652.), e per ciò anche il triangolo LEH equivale al parallelogrammo NTQH; onde ISM. LEH::NTOM.

S 2

NTQH:

NTQH: ora, poichè simili sono i triangoli ISM, LEH, noi abbiamo ISM. LEH : :  $\overline{MS}$ .  $\overline{HE}$ ; però  $\overline{MS}$ .  $\overline{HE}$  : : NTOM. NTQH: ma essendo questi due ultimi termini, o parallelogrammi fra le stesse parallele PR, TB, sono tra essi come lelorbali NM, NH; dunque  $\overline{MS}$ .  $\overline{HE}$  : : NM. NH.

656. PROPOSIZIONE CXXIX. *Se cercasi una terza media proporzionale ad un' affissa NM ( Fig. 399. ) d' un diametro PR, e alla sua ordinata MS, i quadri dell' ordinate a esso diametro saranno uguali alle lor' affisse moltiplicate per questa terza proporzionale.*

Noi abbiamo  $\overline{MS}$ .  $\overline{HE}$  : : NM. NH ( N. 655. ); onde chiamando  $x$  la terza proporzionale, e moltiplicando le due affisse per la medesima grandezza  $x$ , avremo ancora  $\overline{MS}$ .  $\overline{HE}$  : : NM  $\times x$ . NH  $\times x$ : ma per la proporzione continua : : NM. MS.  $x$  abbiamo  $\overline{MS} = NM \times x$ ; cioè uguali sono i due antecedenti  $\overline{MS}$ : NM  $\times x$  della proporzione  $\overline{MS}$ .  $\overline{HE}$  : : NM  $\times x$ . NH  $\times x$ ; dunque egli lo sono altresì i due conseguenti  $\overline{HE}$ , NH  $\times x$ .

657. La terza media proporzionale all' affissa NM e all' ordinata MS d' un diametro PR diceli'l Parametro d' esso diametro; poichè questa proporzionale moltiplicando l' affissa, fa un prodotto uguale al quadro dell' ordinata, siccome rispetto all' asse il prodotto dell' affissa per lo parametro equivale al quadro dell' ordinata.

658. COROLLARIO I°. *Il parametro d' un diametro, essendo stato preso terzo proporzionale ad una affissa NM e alla sua ordinata MS, è parimente terzo proporzionale a qualsivoglia altra affissa NH, e alla sua ordinata HE.*

Poichè, chiamando  $x$  questo parametro, abbiamo  $\overline{HE} = NH \times x$  ( N. 656. ); dunque : : NH. HE.  $x$ .

659. COROLLARIO II. *Se dal vertice N d' un triangolo PR ( Fig. 400. ) tirasi un' ordinata NB all' asse, il parametro del diametro PR sarà uguale al parametro dell' asse, più quattro volte l' affissa AB del medesimo asse.*

Dal vertice A tiro l' ordinata AR al diametro PR; così 'l parametro del diametro sarà una terza proporzionale all' affissa NR, e all' ordinata AR: ma per le parallele NT, RA, ed NR, TA, abbiamo NR = TA, ed AR = NT; onde 'l parametro del dia-

diametro farà terza proporzionale alla metà TA della fulttangente TB e alla tangente NT, e per conseguenza : TA . TN . x ;

dal che io deduco  $\overline{TN} = TA \times x$  : ora, a cagione del triangolo rettangolo NTB, io ho  $\overline{TN} = \overline{NB} + \overline{TB} = AB \times 4AO + 4\overline{TA} = TA \times 4AO + 4\overline{TA}$ ; poichè TA = BA (N.641.), e per la

proprietà della parabola, NB = AB  $\times$  4AO = TA  $\times$  4AO, supponendo che 'l punto O fia 'l fuoco : se dunque si paragonano insieme i due valori di  $\overline{TN}$ , avremo TA  $\times$  x = TA  $\times$  4AO + 4TA; e 'l tutto dividendo per TA, il quoziente farà x = 4AO + 4TA = 4AO + 4AB, cioè 'l parametro del diametro PR equivale a 4AO, o sia al parametro dell'asse, più quattro volte l'assissa AB.

660. COROLLARIO III. *Se dal vertice N d'un diametro PR (Fig. 400.) tirasi al fuoco la retta NO, ella farà 'l quarto del parametro del diametro PR, siccome AO, tirata dal vertice dell'asse al fuoco, è 'l quarto del parametro dell'asse.*

Tiro la direttrice PQ, ed ho NO = LB = AB + LA ; cioè NO uguale all'assissa AB dell'asse, più 'l quarto del parametro di detto asse : ma il parametro del diametro è uguale a quattro volte l'assissa AB, più 'l parametro, o 4LA (N. 659.) ; dunque 'l parametro del diametro è quadruplo di NO.

661. COROLLARIO IV. *L'angolo ONT formato dalla retta NO, tirata dal vertice N del diametro PR al fuoco O, colla tangente NT equivale all'angolo XNR, fatto dalla medesima tangente col diametro PR.*

Dal punto P, in cui 'l diametro PR sega la direttrice, tiro al fuoco la retta PO; così la tangente NT sega PO per mezzo in Z (N. 640.), e a cagione de' triangoli simili ed uguali PZN, TZO, ho PN = TO: ma PN = LB = NO per la costruzione della parabola; onde NO = TO; e per conseguenza isoscele essendo il triangolo NOT, l'angolo TNO equivale all'angolo NTO: ora quello equivale all'angolo XNR, a motivo delle parallele PR, TB; dunque l'angolo ONT è uguale all'angolo XNR.

662. PROPOSIZIONE CXXX. *Dati due diametri, ovvero l'asse e due diametri insieme colle lor tangenti PO, OM (Fig. 401.), se dall'uno all'altro punto del contatto tirasi la retta PM e dividesi per mezzo in V, la retta OV che passerà pe' punti V ed O, in cui le due tangenti si segano, farà 'l diametro della retta PM, e delle sue parallele.* La

La retta PM e le sue parallele han necessariamente un diametro, poichè l'infinite tangenti, che tirar si possono sopra ciascun punto dell'arco parabolico PM, essendo tutte diversamente inclinate fra loro, converrà che ve ne sia alcuna di parallela alla retta PM; e in conseguenza, dal punto del contatto di questa tangente tirando una linea parallela all'asse, ella segnerà PM e ciascuna delle sue parallele in due parti eguali ( N. 653. ). Però se vogliamo, che la linea OV, la quale sega PM, non seghi per mezzo anche le parallele a PM, saravvi dunque qualche altra linea, che passerà pel punto V, e che dividerà per mezzo le parallele; e detta linea piglierà la sua direzione o a dritta, o a sinistra del punto O, in cui le tangenti PO, MO si segano, cioè fra i punti P, M del contatto ( N. 644. ). Supponiamo, che questa sia la linea VL; dal punto L tiro la retta LP segante la parabola, mercè che PO, la quale passa per lo stesso punto P, è tangente: così PL sarà una parte PE nella parabola. Tiro una retta ST, parallela a PM e segante PE in un punto R, e prolungo ST in H. I triangoli simili LPV, LRK ci danno  $PV : RK :: VL : KL$ ; e a motivo de' triangoli simili LVM, LKH, ho  $VM : KH :: VL : KL$ ; onde  $PV : RK :: VM : KH$ ; ma  $PV = VM$ ; dunque  $RK = KH$ ; ora SK è maggiore di RK, e all'opposto KT è minore di KH; però SK è maggiore di KT, e per conseguente la retta LV, che divide PM in due parti uguali, non divide per mezzo la retta ST parallela a PM; donde avviene non esser questa un diametro.

Si proverà nello stesso modo, che qualunque altra linea, la quale passi pel punto V, e prenda la sua direzione fra P ed O, non è un diametro; dunque dovendone esser' uno, egli necessariamente sarà la retta VO.

**663. COROLLARIO.** La retta VO tirata dal punto O, in cui le tangenti si segano, sopra'l mezzo della retta PM, che congiunge i punti del contatto, è parallela ai diametri PZ, MN.

Poichè tutt' i diametri d'una parabola debbono esser paralleli all'asse ( N. 648, 653. ), e in conseguenza fra loro.

**664. AVVERTIMENTO.** Ciò che da noi s'è detto ( N. 649, 650 e 652 ) rispetto all'asse e ad un diametro, puossi col mezzo della precedente Proposizione dimostrare anche rispetto a due diametri.

Sieno p. r. i due diametri PZ, MN ( Fig. 402. ) e le lor tangenti PT, MD, che si segano in O; tiro la retta PM, ch'io divido per mezzo in V, e la retta VO, la quale, essendo un diametro

metro ( N.662. ), è parallela ai due diametri  $PZ$ ,  $MN$ ; dal punto  $P$  tiro  $PN$  parallela alla tangente  $MD$ , e da  $M$  la retta  $MZ$  parallela alla tangente  $PT$ ; e in conseguenza  $PN$  è ordinata al diametro  $MN$ , ed  $MZ$  al diametro  $PZ$ ; e la figura  $POMR$  è un parallelogrammo. Ora, la diagonale  $PM$  è divisa per mezzo in  $V$  dalla retta  $OV$ ; onde  $OV$ , essendo prolungata, dee essere l'altra diagonale, e passar dee pel punto  $R$ . Così, a motivo delle parallele  $PT$ ,  $ZM$ , uguali sono le parallele  $PZ$ ,  $OR$ ,  $TM$ , cioè  $OR$  equivale a ciascuna delle rette  $PZ$ ,  $TM$ ; e a cagione delle parallele  $DM$ ,  $PN$ , la retta  $OR$  è altresì uguale a ciascuna delle rette  $PD$ ,  $NM$ ; dal che ne segue, ch'uguali sono le quattro linee  $TM$ ,  $MN$ ,  $PD$ ,  $PZ$ .

Dunque 1°. A motivo di  $TM = MN$ , la suttangente  $TN$  del diametro  $MN$  è divisa per mezzo al vertice  $M$  di esso diametro, e per conseguente essa è l doppio dell'assissa  $MN$ ; e a motivo di  $DP = PZ$ , la suttangente  $DZ$  del diametro  $PZ$  è l doppio dell'assissa  $PZ$ .

Dunque 2°. I triangoli  $DOP$ ,  $TOM$  formati dalle tangenti e dai diametri sono uguali; perocchè son simili, ed hanao il lato  $PD$  uguale al lato  $TM$ .

Dunque 3°. Il triangolo  $PTN$ , fatto dalla tangente  $PT$ , dalla suttangente  $TN$  e dall'ordinata  $PN$  al diametro  $MN$ , equivale al parallelogrammo  $MNPD$ , formato dalla medesima ordinata  $PN$  e dalla tangente  $MD$  dello stesso diametro  $MN$  contenute fra i due diametri. Poichè, se ad ognuno de' triangoli uguali  $TOM$ ,  $DOP$  s'aggiugne la parte comune  $OPNM$ , s' avrà  $PTN = MNPD$ ; e proveremo nello stesso modo, che  $MDZ = PZMT$ .

Dunque 4°. Se da qualsivoglia punto  $S$  ( Fig. 403. ) preso sopra la curva tiransi  $XR$ ,  $LH$  parallele alle due tangenti  $TP$ ,  $MD$ , il triangolo  $HSR$ , fatto dalle due parallele col diametro  $MN$ , è uguale al parallelogrammo  $MDXR$ , formato dalla tangente  $MD$  di esso diametro e dalla sua parallela contenute fra i due diametri. Imperciocchè, tirando da  $P$  l'ordinata  $PN$ , avremo  $TPN = MDPN$ , come s'è veduto: ora, simili essendo i triangoli  $TPN$ ,  $HSR$ , ab-

biamo  $TPN$ .  $HSR$  ::  $\overrightarrow{PN}$ .  $\overrightarrow{SR}$ : ma  $PN$ ,  $SR$ , essendo ordinate al diametro  $MN$ , ci danno  $\overrightarrow{PN}$ .  $\overrightarrow{SR}$  ::  $MN$ .  $MR$ ; dunque  $TPN$ .  $HSR$  ::  $MN$ .  $MR$ : ora, ritrovandosi i due parallelogrammi  $MNPD$ ,  $MRXD$  fra due parallele, sono fra se come le lor basi  $MN$ .



MN, MR; e perciò TPN. HSR :: MNPD. RXD : ma TPN = MNPD; dunque HSR = MRXD.

Proveremo altresì, che'l triangolo XSL, fatto dalle due parallele e dall'altro diametro, equivale al parallelogrammo, formato dalla tangente PT di esso diametro e dalla sua parallela contenute infra i diametri; poichè, dall'altro punto del contatto M tirando l'ordinata MZ al diametro PZ, i triangoli simili DMZ, XSL faranno fra loro come i quadri delle lor basi, o dell' ordinate MZ, SL, ed in conseguenza come l'affisse PZ, PL, o come i parallelogrammi PTMZ, PTHL, i quali son nella stessa ragione delle loro basi PZ, PL, mercè che sono tra due parallele; dunque egli s'avrà DMZ. XSL :: PTMZ. PTHL : ma DMZ = PTMZ; onde XSL = PTHL.

Lo stesso si dimostrerà in qualunque punto della curva trovisi'l punto S.

665. COROLLARIO. Nella parabola, due tangenti PT, DM (Fig. 403.) , le quali si segano andando a terminare ai diametri opposti, si tagliano ciascuna in due parti uguali.

Poichè, simili essendo ed uguali i triangoli DOP, TOM, si ha PO = OT, e DO = OM.

666. PROPOSIZIONE CXXXI. Se dati due diametri PZ, MN (Fig. 404.) colle lor tangenti PT, MD pigliansi sopra la curva due punti R, S fra i due vertici P ed M, e che da ciascuno di detti punti tirinsi delle rette RL, RC, SH, od IH, SE, od XE parallele alle tangenti, il trapezoide QCES, formato col diametro MN dalle due parallele QC, SE che lo segano, e dalla più vicina HS all'altre due, equivale al trapezoide LRQH, fatto col l'altro diametro PZ dalle due parallele QH, RL che lo segano, e dalla più vicina RC all'altre due.

Essendo RC, LN parallele alle tangenti, abbiamo CRN = NMDL (N. 664.) ; e d'amendue le parti togliendo la parte comune RBMN, avremo CBM = BDLR: così pure, a motivo delle rette HI, SE parallele alle tangenti, abbiamo ESI = IHDM; e dall'uno e dall'altro lato sottraendo la parte comune SVMI, avremo EVM = VDHS, e per conseguenza CBM — EVM = BDLR — VDHS: ma CBM — EVM = CBVE; dunque CBVE = BDLR — VDHS, ovvero CBVE + VDHS = BDLR; e dall'una e dall'altro lato togliendo la parte comune VDHS, avremo finalmente CQSE = HQRL.

667. COROLLARIO. Se a ciascuno de' trapezoidi uguali CQSE, HQRL

HQRL s' aggiugne il picciolo parallelogrammo QRXS, avremo  $CRXE = HSQL$ ; cioè l' trapezoide CRXE, formato col diametro MN dalle parallele RC, XE, che lo segano, e dalla più distante XL dall' altre due parallele, equivale al trapezoide HSQL, fatto coll' altro diametro dalle parallele HS, LX, che lo segano, e dalla più distante XE dall' altre due.

NOTA. Questa Propolizione e' l' suo Corollario son nelle tre Sezioni Coniche di massimo giovamento, come si vedrà nelle seguenti Propolizioni spettanti alla parabola, ed in quelle, che daremo intorno l' Elisse e l' Iperbola.

668. PROPOSIZIONE CXXXII. Se due rette SX, RY ( Fig. 405. 406. 407. ), che d' ambe le parti terminano alla curva parabolica, si segano nella parabola, il rettangolo SK x KX delle parti disuguali della prima è al rettangolo RK x KY delle parti disuguali della seconda, come 'l quadrato  $\overline{PO}$  della tangente del diametro PB della prima è al quadro  $\overline{OM}$  della tangente del diametro MV della seconda.

O amendue le linee SX, RY segano l' arco parabolico PM compreso fra i due diametri PB, MV ( Fig. 405. ); o l' una SX ( Fig. 406. ) sega l' arco PM, e l' altra RY non lo sega; o finalmente non lo sega alcuna delle due ( Fig. 407. ).

Nel primo caso ( Fig. 405. ) prolungo le rette SX, RY fino al concorso de' diametri prolungati in E ed L, e da' loro punti S, R, che sono sopra l' arco PM, tiro le rette SH, RC parallele alle tangenti. Essendo la retta SX segata dal suo diametro in due parti uguali in B, e disuguali in K, abbiamo  $SK \times KX = \overline{SB} - \overline{KB}$  ( N. 146. ): ora, ne' triangoli simili BSH, BKL noi abbiamo  $\overline{SB} . \overline{KB} :: BSH . BKL$  ( N. 392. ); dunque  $\overline{SB} - \overline{KB} . \overline{SB} :: BSH - BKL . BSH$ , ovvero  $\overline{SB} - \overline{KB} . BSH - BKL :: \overline{SB} . BSH$ , cioè  $SK \times KX . KSHL :: \overline{SB} . BSH$ : ma i triangoli simili BSH, POD ci danno  $\overline{BS} . BSH :: \overline{PO} . POD$ ; però  $SK \times KX . KSHL :: \overline{PO} . POD$ , od  $SK \times KX . \overline{PO} :: KSHL . POD$ . Con simile discorso io troverò, che  $RK \times KY . \overline{OM}$

: : RCEK. TOM; da una parte dunque noi abbiamo  $SK \times KX$ .

$\overline{PO} : : KSHL$ . POD, e dall'altra,  $RK \times KY$ .  $\overline{OM} : : RCEK$ . OMT: ora, a motivo di  $KSHL = RCEK$  (N. 667.), e di  $POD = OMT$  (N. 664.), l'ultima ragione  $KSHL$ , POD della prima proporzione equivale all'ultima ragion RCEK, OMT della seconda; onde le due prime ragioni di queste proporzioni son' uguali; e dividendo,  $SK \times KX$ .  $\overline{OP} : : RK \times KY$ .  $\overline{OM}$ , od  $SK \times KX$ .  $RK \times KY : : \overline{PO}$ .  $\overline{OM}$ .

Nel secondo caso (Fig. 406.) prolungo XS in E, e da' punti S, X tiro le rette SH, XZ parallele alla tangente DM: così pure, dal punto R tiro la retta RC parallela alla tangente PT, e dal punto Q la retta QL parallela alla tangente DM. Ciò fatto, ragionando come sopra, troverò  $SK \times KX$ .  $XKFZ : : \overline{XB}$ .  $\overline{XBZ} : : \overline{PO}$ . POD, ovvero  $SK \times KX$ .  $\overline{PO} : : XKFZ$ . POD, e finalmente  $RK \times KY$ .  $\overline{MO} : : RCEK$ . MOT: ora  $POD = MOT$ : dunque s'io provo, che  $XKFZ = RCEK$ , avremo  $SK \times KX$ .

$RK \times KY : : \overline{PO}$ .  $\overline{MO}$ . Ora, a fine di provarlo, offervo che  $XKFZ = XBZ - KBF$ , e che a motivo dell'ordinata XS divisa per mezzo in B, i triangoli simili XBZ, BHS sono uguali; però  $XKFZ = BHS - KBF$ : ma a cagione delle rette SH, SB parallele alle tangenti, abbiamo  $BHS = PTEB$  (N. 664.); onde  $XKFZ = PTEB - KBF$ .

Offervo pure, che la parte RGBK del trapezoide RCEF equivale al triangolo RGF meno'l triangolo KBF: ora, a motivo dell'ordinata RQ divisa per mezzo in G, i triangoli simili RGF, GQL sono uguali; dunque  $RGBK = QGL - KBF$ : ma a cagione delle rette QL, QG parallele alle tangenti, noi abbiamo  $GQL = PTCG$  (N. 664.). Onde  $RGBK = PTCG - KBF$ ; e ad amendue i lati sommando la parte comune GCEB, avremo  $RCEK = PTEB - KBF$ : ma egli s'è trovato  $XKFZ = PTEB - KBF$ ; dunque  $RCEK = XKFZ$ .

Nel terzo caso (Fig. 407.) da' punti R, S tiro delle parallele RC, SH alle tangenti, e da' punti Q, F, in cui queste rette tagliano la curva, io tiro parimente delle rette QL, FE parallele alle tangenti. Ciò fatto, noi avremo, come prima,  $SK \times KX$ .  $\overline{PO}$ .

$\overline{PO} :: \overline{SHIK} . \overline{POD}$ , ed  $\overline{RK} \times \overline{KY} . \overline{OM} :: \overline{RCNK} . \overline{OMT}$ ,  
e a motivo di  $\overline{POD} = \overline{OMT}$  altro non ci resta a provare che  
 $\overline{SHIK} = \overline{RCNK}$ , il che ci darà  $\overline{SK} \times \overline{KX}$ ,  $\overline{RK} \times \overline{KY}$

:  $\overline{PO}$ ,  $\overline{MO}$ . Però io osservo, che a cagione dell'ordinata  $\overline{SF}$ ,  
divisa per mezzo in  $\overline{Z}$ , i triangoli simili  $\overline{ZSN}$ ,  $\overline{ZEF}$  son' uguali :  
ora, a motivo di  $\overline{FE}$ ,  $\overline{FZ}$  parallele alle tangenti, abbiamo  $\overline{ZEF} = \overline{MDHZ}$ ;  
onde  $\overline{ZSN} = \overline{MDHZ}$ ; e all'uno e all'altro lato giugnendo la parte comune  $\overline{ZHKN}$ ,  
avremo  $\overline{SHIK} = \overline{MDIKN}$ . Osservo pure, ch' a cagione dell'ordinata  $\overline{RQ}$ ,  
divisa per mezzo in  $\overline{G}$ , i triangoli simili  $\overline{GRI}$ ,  $\overline{HQQ}$  sono uguali: ora, a motivo  
delle rette  $\overline{GL}$ ,  $\overline{GQ}$  parallele alle tangenti, abbiamo  $\overline{LQG} = \overline{PTCG}$ ;  
dunque  $\overline{GRI} = \overline{PTCG}$ ; e ad amendue i lati sommando la parte  
comune  $\overline{GCNKI}$ , avremo  $\overline{RCNK} = \overline{PTNKI}$ : ma  $\overline{OMT} = \overline{POD}$ ;  
onde giugnendone la parte comune  $\overline{POMNKI}$ , avremo  $\overline{PTNKI} = \overline{MDIKN}$ ;  
però  $\overline{RCNK} = \overline{MDIKN}$ : ma egli s'è trovato  
 $\overline{SHIK} = \overline{MDIKN}$ ; dunque  $\overline{SHIK} = \overline{RCNK}$ .

669. PROPOSIZIONE CXXXIII. *Se due linee  $\overline{AX}$ ,  $\overline{AZ}$  (Fig. 408.), seganti la parabola, si tagliano in un punto  $\overline{A}$  fuori della stessa, il rettangolo  $\overline{AX} \times \overline{AQ}$  della prima  $\overline{AX}$  per la sua parte esteriore  $\overline{AQ}$  è al rettangolo  $\overline{AZ} \times \overline{AS}$  della seconda  $\overline{AZ}$  per la sua parte esteriore  $\overline{AS}$ , come 'l'quadro  $\overline{PO}$  della tangente del diametro  $\overline{PD}$  della prima è al quadro  $\overline{OM}$  della tangente del diametro  $\overline{ME}$  della seconda.*

Prolungo le rette  $\overline{AX}$ ,  $\overline{AZ}$  fino al concorso de' diametri in  $\overline{C}$   
ed  $\overline{H}$ , e da' punti  $\overline{Q}$ ,  $\overline{S}$ , in cui esse tagliano la curva, tiro le  
rette  $\overline{QL}$ ,  $\overline{SE}$  parallele alle tangenti; divisa la retta  $\overline{QX}$  per mezzo  
in  $\overline{B}$ , ed aggiuntale la retta  $\overline{QA}$ , abbiamo  $\overline{AX} \times \overline{AQ} = \overline{AB} - \overline{BQ}$  ( N. 148. ) : ora, i triangoli simili  $\overline{BAH}$ ,  $\overline{BQL}$   
ci danno  $\overline{AB} . \overline{BQ} :: \overline{ABH} . \overline{BQL}$ ; dunque  $\overline{AB} - \overline{BQ} . \overline{AB} :: \overline{ABH} - \overline{BQL} . \overline{ABH}$ , cioè  $\overline{AX} \times \overline{AQ} . \overline{AB} :: \overline{AHLQ} . \overline{ABH}$ ,  
ovvero  $\overline{AX} \times \overline{AQ} . \overline{AHLQ} :: \overline{AB} . \overline{ABH}$ : ma i triangoli simili  $\overline{ABH}$ ,  $\overline{OPD}$  ci danno  $\overline{AB} . \overline{ABH} :: \overline{OP} . \overline{OPD}$ ;  
onde  $\overline{AX} \times \overline{AQ} . \overline{AHLQ} :: \overline{OP} . \overline{OPD}$ , ovvero  $\overline{AX} \times \overline{AQ} . \overline{OP} :: \overline{AHLQ} . \overline{OPD}$ ; e con simile discorso troveremo  $\overline{AZ} \times \overline{AS} . \overline{OM}$

$\overline{OM} : : ACES . OMT : ma OPD = OMT ( N. 664. )$ , ed  $AHLQ = ACES ( N. 666. )$ ; però, nell'ultime due proporzioni ritrovate, la ragione  $AHLQ, OPD$  è simile alla ragione  $ACES, OMT$ , e conseguentemente l'altre due ragioni son' uguali; e noi abbiamo  $AX \times AQ . \overline{OP} : : AZ \times AS . \overline{OM}$ , ovvero  $AX . \times AQ . AZ \times AS : : \overline{OP} . \overline{OM}$ .

670. PROPOSIZIONE CXXXIV. *Dato l'asse AB (Fig. 409.), un diametro PK, e le tangenti AY, PT col' ordinata PZ, tirata all'asse dal punto del contatto P, io dico; che se dal punto T tirasi una secante TS, che seggi la parabola in R ed S, e l'ordinata PZ in N, sarà detta secante tagliata armonicamente ne' punti R, N.*

Da' punti R, S tiro le rette MC, BV parallele alla tangente AY, e le rette LE, SH parallele alla tangente TPV; finalmente dal punto X, in cui la retta SH sega la curva, tiro XD parallela ad AY. I triangoli simili BVT, MQT ci danno BV. MQ : : BT. MT, e a motivo de' triangoli simili BST, MRT abbiamo BS. MR : : BT. MT; onde BV. MQ : : BS. MR, e però  $\overline{BV} . \overline{MQ} : : \overline{BS} . \overline{MR}$ : ma i triangoli simili BVT, MQT sono fra lor come i quadri  $\overline{BV}, \overline{MQ}$  de' loro lati omologhi BV, MQ, e per la stessa ragione i triangoli simili BSH, MRL sono tra loro come  $\overline{BS}, \overline{MR}$ ; dunque BVT. MQT : : BSH. MRL, ovvero BVT. BSH : : MQT. MRL; ed in conseguenza BVT, BVT — BSH : : MQT, MQT — MRL, cioè BVT. TVSH : : MQT. TQRL: ma a cagione dell'ordinata al diametro XS, divisa per mezzo in O, i triangoli simili KOS, XDO son' uguali, e a motivo delle rette XD, XO parallele alle tangenti il triangolo XDO equivale al parallelogrammo PTHO; onde KOS = PTHO; e all'una e all'altra parte sommando 'l trapezoide POSV, avremo KPV = VTHS. Così pure, il triangolo CRE equivale al parallelogrammo PTLE, e levando la parte comune PQRE, avremo CQP = QTLR; ponendo dunque nella proporzione sopra ritrovata BVT. TVSH : : MQT. TQRL i valori di TVSH, TQRL, avremo BVT. KPV : : MQT. CQP, ovvero BVT. MQT : : KPV, CQP. Ma i triangoli BVT. MQT sono fra se come i qua-

i quadri  $\overline{VT}$ ,  $\overline{QT}$  de' loro lati omologhi, e i triangoli KPV, CQP come  $\overline{VP}$ ,  $\overline{QP}$ ; però  $\overline{VT} \cdot \overline{QT} :: \overline{VP} \cdot \overline{QP}$ , e quindi  $\overline{VT} \cdot \overline{QT} :: \overline{VP} \cdot \overline{QP}$ , ovvero  $\overline{QT} \cdot \overline{QP} :: \overline{VT} \cdot \overline{VP}$ : ma a cagione delle parallele MR, ZP, BV, la retta TS è divisa nella stessa ragione della retta VT; onde TR. RN :: TS. SN; il che potrebbe pure dimostrare, quando anche TB fosse un diametro.

671. AVVERTIMENTO. Da questa dedur si possano le seguenti proposizioni. 1°. Se dato l'asse AB (Fig. 410.), una tangente TP e l'ordinata PR dal punto T si tira MN parallela a PR, e due secanti TV, TZ equidistanti dall'asse, io dico; che le rette QZ, XV, le quali passano pe' punti, in cui le secanti tagliano la curva, passeranno pel punto R. 2°. Poste le stesse cose, se da qualsivoglia punto M preso sopra MN tirasi una retta MV, che segbi la curva in X ed V, e che passi pel punto R, ella sarà segata armonicamente ne' punti X, R, V. 3°. Poste ancora le stesse cose, se da qualsivoglia punto P (Fig. 411.) preso sopra MN tiransi due tangenti PV, PX alla curva (come insegneremo a suo luogo), la linea XV, tirata da' punti del contatto passerà pel punto R. 4°. Finalmente, poste sempre le stesse cose, se prolungasi RP in H (Fig. 412.), e che da qualsivoglia punto H preso sopra PH si tirino due tangenti HQ, HZ alla curva, la retta ZQ, tirata da' punti del contatto, passerà pel punto T.

Tutte queste proposizioni si mostrano nella stessa maniera, che si son dimostrate rispetto al circolo (N. 301. 302. 303. ec.); e chi vorrà legger di nuovo quanto abbiám detto nel Capitolo VI. circa la linea divisa armonicamente, potrà quindi senza molta fatica inferire dell'altre proprietà della parabola.

672. PROPOSIZIONE CXXXV. Se dati due diametri PB, MV (Fig. 413.) colle loro tangenti PT, MD tirasi all'uno di essi un'ordinata CA, e che si prolunghi, finchè incontri in E la tangente DM dell'altro diametro, il rettangolo CE x EA di susa la CE per l'aggiunta EA è al quadro  $\overline{EM}$  della parte EM della tangente DM ch'essa taglia, come 'l quadro  $\overline{PO}$  della tangente del diametro PB è al quadrato  $\overline{OM}$  della tangente dell'altro.

Dal punto A tiro LX parallela alla tangente, ed in conseguenza ragionando come sopra (N. 669.), ho EG x EA . EDLA ::  $\overline{PO}$ .  $\overline{POD}$ .  
ora

ora, a motivo delle rette XL, AN parallele alle tangenti, abbiamo  $NAX = MDLX$ ; dunque levando la parte comune MEAX, avremo  $ENM = EDLA$ : ma noi abbiamo ancora  $POD = MOT$  (N.664); onde ponendo nella nostra proporzione i valori di EDLA e POD, avremo  $EG \times EA . ENM :: \overline{PO} . MOT$ , ovvero  $EG \times EA . \overline{PO} :: ENM . MOT$ ; e'n vece di quest'ultimi due triangoli simili ponendo i quadrati  $\overline{EM}$ ,  $\overline{OM}$  de' loro lati omologhi, avremo  $EC \times EA . \overline{PO} :: \overline{EM} . \overline{OM}$ , ovvero  $EC \times EA . \overline{EM} :: \overline{PO} . \overline{OM}$ .

Se la retta CA ( Fig. 414. ) sega la parabola in un punto A fuori dell'arco parabolico PM compreso fra i diametri, tiro AL parallela alla tangente DM; e dal punto Q, in cui detta parallela sega la parabola, tiro QN parallela all'altra tangente. Così io ho sempre  $EG \times EA . EDLA :: \overline{PO} . POD$ : ora, uguali essendo i triangoli simili AVX, NQX, a cagione dell'ordinata AQ divisa per mezzo dal suo diametro MV, ed essendo 'l triangolo NQX uguale al parallelogrammo MDLX, abbiamo  $AVX = MDLX$ ; e all'uno e all'altro lato aggiugnendo la parte comune MXAE, avremo  $MVE = EDLA$ : ma  $POD = MOD$ ; onde ponendo nella nostra proporzione i valori di EDLA e di POD, avremo  $EC \times EA . MVE :: \overline{PO} . MOT$ , ovvero  $EC \times EA . \overline{PO} :: MVE . MOT$ , e ponendo i quadri de' lati omologhi di questi due ultimi triangoli, avremo  $EC \times EA . \overline{PO} :: \overline{ME} . \overline{OM}$ , ovvero  $EC \times EA . \overline{ME} :: \overline{PO} . \overline{OM}$ .

NOTA. Lo stesso avverrebbe, se l'uno de' diametri fosse l'asse.

673. DIFFINIZIONE. La porzione ABC ( Fig. 415. ) d'una parabola, legata da una retta AC, s'appella *segmento di parabola* e la retta AG n'è la *corda*, o *base*. Qualsivoglia triangolo AEC, ABC, ec. che ha per base la base AC del segmento, e'l cui vertice è sopra l' arco parabolico ABC, dicefi triangolo *iscritto*, e quello, la cui sommità è al vertice B del diametro BR della base, dicefi triangolo *maggiore*, o *massimo*; poichè, se a questo stesso punto B tirasi la tangente MN, che sarà parallela all' ordinata, o alla base AC, e che fra queste due parallele si tiri la perpendicolare

lare BR, egli è manifesto, che'l punto B è fra tutt' i punti dell' arco ABC il più distante dalla base; e in conseguenza, uguale essendo la base di tutt' i triangoli iscritti, quelli, che non avranno'l vertice in B, saran minori del triangolo ABC, perocchè minore sarà la loro altezza, o distanza dal vertice alla base.

674. PROPOSIZIONE CXXXXVI. *Se dati due segmenti APC, BME (Fig. 415. 416. 417.) d'una medesima parabola ACE le parti PR, MV de' diametri delle lor basi comprese in questi segmenti sono uguali, i triangoli maggiori iscritti in questi stessi segmenti sono altresì uguali.*

O le basi AC, BE de' segmenti si segano nella parabola (Fig. 415), o al di fuori in X ( Fig. 416. ), o in un punto della curva ( Fig. 417. ).

S' elle si segano nella parabola ( Fig. 415. ), tiro le rette AP, EM, il che mi dà le metà APR, EMV de' triangoli maggiori iscritti, a cagione di  $AR = RC$ , e di  $EV = VP$ : così quello, che noi diremo de' triangoli APR, EMV, si dirà anche de' massimi triangoli iscritti. Da' vertici P, M de' diametri tiro le tangenti PO, MO, e la retta PM: così pure, dall' estremità e dal mezzo delle basi tiro le rette BC, AE, RV, l' ultima delle quali è parallela a PM, a motivo delle parallele uguali PR, MV; finalmente dal punto O, in cui le tangenti si segano, e dal mezzo della linea PM, che congiunge i loro punti del contatto, tiro la retta OL, ch'è un diametro ( N. 662. ); e per conseguente OL è parallela ai due diametri, e sega eziandio per mezzo la retta RV parallela a PM. Ora i triangoli simili POM, RXV, per avere uguali le basi PM, RV, sono fra loro uguali, e però  $RX = PO$ ,  $VX = MO$ ,  $RX = PO$ , ed  $VX = MO$ ; donde avviene, che  $RX : VX :: PO : MO$ ; ma perchè le basi AC, BE de' segmenti si segano in X, noi abbiamo  $CX \times AX . BX \times XE :: PO . MO$  ( N. 668. ), ovvero  $CR - XR . BV - XV :: PO . MO$ , per essere le basi AC, BM divise in due egualmente in R ed V, e disugualmente in X; dunque  $CR - XR . BV - XV :: RX . VX$ , ovvero  $CR - XR . XR :: BV - XV . XV$ , e componendo,  $CR - XR + XR . XR :: BV - XV + XV . XV$ ; il che si riduce a  $CR, XR :: BV . XV$ , e quindi s' inferisce  $CR . XR$



BR. XR : : BV. XV, ciò che rende le linee RV, BC parallele: ora CR = AR, e BV = VE; onde AR. XR : : VE. VX, ed in conseguenza parallele sono le linee AE, RV: così le quattro BC, PM, RV, AE sono fra loro parallele, e son segate per mezzo dal diametro OL; il che fa, che tanto 'l parallelogrammo PMVR, quanto i trapezoidi RVEA e PMEA sien tutti divisi per mezzo dallo stesso diametro; dunque da una parte di quest'ultimo trapezoide togliendo 'l parallelogrammo PSIR e 'l trapezoide RILA, e dall'altra il parallelogrammo MSIV = PSIR e 'l trapezoide VILE = RILA, resterà PAR = MVE; e conseguentemente i doppi di detti triangoli, cioè i triangoli maggiori iscritti ne' segmenti APC, BME sono uguali.

Se le basi AC, EB de' segmenti si tagliano al di fuori in X (Fig. 416.), tiro le rette CB, PM, RV, AE, e la retta OL pel mezzo S di PM; ed in conseguenza la retta OL, essendo un diametro (N. 662.), è parallela agli altri due, e taglia eziandio per mezzo la linea RV uguale e parallela a PM, a motivo delle parallele uguali PR, MV. In oltre, poichè i triangoli simili POM, RXV hanno uguali le basi PM, RV, sono fra loro uguali, ed RX = PO, VX = OM,  $\overrightarrow{RX} = \overrightarrow{PO}$ ,  $\overrightarrow{XV} = \overrightarrow{OM}$ ; e quindi io deduco  $\overrightarrow{RX} . \overrightarrow{XV} : : \overrightarrow{PO} . \overrightarrow{OM}$ : ora, le secanti AX, XE mi danno  $\overrightarrow{AX} \times \overrightarrow{XC} . \overrightarrow{EX} \times \overrightarrow{XB} : : \overrightarrow{PO} . \overrightarrow{MO}$  (N. 669.), od  $\overrightarrow{XR} - \overrightarrow{CR} . \overrightarrow{XV} - \overrightarrow{BV} : : \overrightarrow{PO} . \overrightarrow{MO}$ , a cagione delle linee AC, BC divise ugualmente in R, V, e dell'aggiunte CX, BX; dunque  $\overrightarrow{XR} - \overrightarrow{CR} . \overrightarrow{XV} - \overrightarrow{BV} : : \overrightarrow{RX} . \overrightarrow{XV}$ , ovvero  $\overrightarrow{XR} - \overrightarrow{CR} . \overrightarrow{XR} : : \overrightarrow{XV} - \overrightarrow{BV} . \overrightarrow{XV}$ , e da ciascun conseguente levando 'l suo antecedente, poi paragonando il residuo al conseguente, avremo  $\overrightarrow{XR} - \overrightarrow{XR} + \overrightarrow{CR} . \overrightarrow{XR} : : \overrightarrow{XV} - \overrightarrow{XV} + \overrightarrow{BV} . \overrightarrow{XV}$ , il che si riduce ad  $\overrightarrow{XR} . \overrightarrow{CR} : : \overrightarrow{XV} . \overrightarrow{BV}$ ; però XR. CR : : XV. EV, ed in conseguenza le linee CB, RV son parallele. Ma RC = AR, ed VB = EV; dunque XR. AR. XV. VE, il che rende ancora parallele le rette RV, AE: così le quattro CB, PM, RV, AE son parallele, e divise ciascuna per mezzo dal diametro OL; dal che n'avviene, che 'l parallelogrammo PMVR, e li trapezoidi RVAE e PMAE sono altresì divisi ciascuno per mezzo dallo

dallo stesso diametro. Onde, da una parte di quell'ultimo sottraendo PSIR ed RILA, e dall'altra togliendo SMVI = PSIR ed VILE = RILA, resterà PAR = MVE.

In fine, se le basi AC, BE de' segmenti si tagliano in un punto della curva (Fig. 417.), tiro le rette PM, RV, AE fra loro parallele per essere PM parallela ad RV, e a motivo di CR. CA :: BV. BE la retta RV è parallela ad AE; però, tirando il diametro OS, e compiendo l' rimanente come sopra, troveremo APR = MVE.

675. PROBLEMA. *Data una parabola ABC ( Fig. 418. ) trovarne il suo asse, il suo parametro, e'l suo fuoco.*

Tiro più linee parallele AN, QD, ec. le quali dall'una e dall'altra parte terminino alla curva; divido ciascuna d'esse per mezzo in R, S, ec. e per i punti di divisione faccio passare una linea SH, che farà l' diametro delle parallele: così, se questo diametro è perpendicolare alle sue ordinate, egli sarà l' asse ricercato; ma se non l' è, dal punto H, in cui ei sega la curva, tiro HG perpendicolare ad HS, e segando HG per mezzo in X, alzo la perpendicolare XB, ch'è l' asse ricercato; poichè HG aver dee un diametro, che la seghi per mezzo, ed egli esser dee parallelo al diametro HS: ora verun'altra linea, da XB in fuori, può avere queste condizioni. Dunque, ec.

Trovato l' asse, tiro in H la retta HT parallela all' ordinate RN, SD, ec. del diametro HS, e per conseguenza HT sarà tangente in H; dal punto H tiro HZ perpendicolare sopra HT, e la superperpendicolare XZ equivale alla metà del parametro (N. 643.); il doppio di questa retta è dunque l' parametro dell' asse, e prendendo l' quarto di questo parametro, e da B portandolo in O, il fuoco si è'l punto O.

Ovvero, faccio in H colla tangente TH l' angolo THO uguale all' angolo EHS, formato da essa col diametro HS; e'l punto O, in cui la retta HO sega l' asse, è'l fuoco ( N. 661. ), e conseguentemente BO è'l quarto del parametro.

O pure in altro modo, dal vertice B dell' asse tiro la retta BL perpendicolare all' asse; colla linea BV divido per mezzo l' angolo retto XBL, e da V, in cui detta linea sega la parabola, tiro l' ordinata VM uguale al parametro; poichè, retto essendo l' angolo XBL, la sua metà XBV è di 45 gradi; dunque, nel triangolo rettangolo BMV, l' altro angolo acuto BVM è parimente di 45 gradi, e per conseguenza detto triangolo è isoscele, ed MV = BM;

Tomo II.

V

don-

donde avviene, che  $\overline{MV} = \overline{MB} = MB \times MB$ : ma chiamando  $P$  il parametro, abbiamo per la proprietà della parabola  $\overline{MV} = MB \times p$ ; onde  $MB \times p = MB \times MB$ ; e perciò dividendo per  $MB$ , avremo  $p = MB$ .

O finalmente, cerco una terza proporzionale a qualsivoglia affissa  $BX$  e alla sua ordinata  $XG$ , e questa terza proporzionale, ch'io chiamo  $p$ , sarà l' parametro; poichè, a motivo di  $\therefore BX$ .

$XG. p$ , avremo  $\overline{XG} = BX \times p$ .

676. DIFFINIZIONE. Se data una parabola  $ABC$  terminata da una base  $AC$  ( Fig. 419. ) tirasi dal vertice  $B$  la tangente  $MN$ , e dall'estremità  $A, C$  della sua base le rette  $AM, CN$  perpendicolari ad  $MN$ , il rettangolo  $AMNC$  dicesi *Rettangolo circonscritto*; la figura mistilinea  $AFBECNM$  chiamasi l' *Compimento della parabola*, e la figura mistilinea  $BECN$  il *Compimento della semiparabola*.

677. PROBLEMA. Misurare una parabola  $ABC$  ( Fig. 419. ) terminata da una base, o doppia ordinata  $AC$ .

Descrivo l' rettangolo circonscritto  $AMNC$ , e li due terzi di esso sono l' valore della parabola; il che io dimostro in questo modo. Concepisco, che  $BN$  sia diviso in infinite parti uguali  $BH, HL$ , ec. e che da' punti di divisione alla curva sieno tirate delle rette  $HR, LV$ , ec. che saranno gli elementi del semicompimento  $BVCN$ ; da' punti  $R, V$ , ec. tiro l' ordinate  $SR, TV$ , ec. così gli elementi  $HR, LV$ , ec. del semicompimento farann' uguali all' affisse  $BS, BT$ , ec. e le distanze  $BH, BL$ , ec. dalle rette  $HR, LV$ , ec. al vertice  $B$  del semicompimento faranno uguali all' ordinate  $SR, TV$ , ec. ma per la proprietà della parabola l' affisse  $BS, BT$ , ec. sono fra loro come i quadri dell' ordinate  $SR, TV$ , ec. dunque gli elementi  $HR, SV$ , ec. saranno fra loro come i quadri delle lor distanze  $BH, BL$ , ec. al vertice  $B$ .

Ora, per quello si è dimostrato ( N. 499. ), se una piramide è legata da infiniti piani paralleli alla sua base; li quali faranno gli elementi di detta piramide, essi sono fra loro come i quadri delle lor distanze al vertice della piramide; perciò gli elementi del semicompimento  $BVCN$  sono fra loro come i piani elementari d' una piramide. Ma la somma de' piani elementari d' una piramide equivale alla base moltiplicata pel terzo della sua distanza al vertice ( N. 504. ); onde la somma degli elementi del semicompimen-

to

to BVCN è uguale alla base, o al massimo elemento NC moltiplicato pel terzo della sua distanza NB al vertice B. Ora, NC moltiplicato per NB è l' rettangolo BDCN, ed NC  $\times \frac{1}{3}$  NB n' è il terzo; però la somma degli elementi del semicompimento, cioè lo stesso semicompimento equivale, al terzo del rettangolo BDCN: ma se da questo rettangolo e' levati'l semicompimento, il residuo è la semiparabola DBNC; detta semiparabola è dunque uguale ai due terzi del rettangolo BDCN; e siccome noi proveremo nello stesso modo, che l'altra semiparabola equivale ai due terzi del rettangolo BDAM, così ne segue, che l'intera parabola ABC equivale ai due terzi del rettangolo circoscritto AMNC.

678. COROLLARIO I°. Se l' rettangolo circoscritto è 1, la parabola sarà  $\frac{4}{3}$ , e'l triangolo ABC, per essere la metà, sarà  $\frac{1}{3}$ ; così, riducendo l' tutto alla medesima denominazione, queste tre Figure saranno fra loro come  $\frac{4}{3}$ ,  $\frac{2}{3}$ ,  $\frac{1}{3}$ , o come 4, 2, 1: ora, dalla parabola sottraendo l' triangolo ABC, il residuo sarà l' valore de' due segmenti AFBX, BVCZ pres' insieme; dunque l' rettangolo circoscritto, la parabola, il triangolo iscritto e la somma de' due segmenti sono tra loro come 6. 4. 3. 1, e per conseguenza la somma de' due segmenti è l'  $\frac{1}{3}$  del rettangolo, l'  $\frac{1}{4}$  della parabola, e l'  $\frac{1}{6}$  del triangolo; e quindi n'avviene, che l' segmento BVCZ è altresì l'  $\frac{1}{6}$  del rettangolo BNCD, l'  $\frac{1}{4}$  della semiparabola BDC, e l'  $\frac{1}{3}$  del triangolo BDC.

679. COROLLARIO II. Un segmento ABC ( Fig. 420. ) di parabola, il cui diametro BP è inclinato sopra la base AC, è parimente li due terzi del parallelogrammo circoscritto, cioè del parallelogrammo AMNC, i cui lati AM, NC sono paralleli ed uguali al diametro BP.

Imperocchè, tirando gli elementi HQ, LV, ec. del semicompimento BNCV paralleli alla base NC dello stesso semicompimento, e l'ordinate QS, TV, ec. gli elementi HQ, LT, ec. saranno uguali all'asse BS, BT, ec. e le parti BH, BL, ec. segate dagli elementi sopra BN saranno uguali all' ordinate QS, VT, ec. onde gli elementi HQ, LV saranno fra loro come i quadri delle parti BH, BL, ec. ch'essi tagliano: ora, se dal vertice B io abbasso la perpendicolare BK sopra la base CN prolungata, gli elementi essendo prolungati taglieranno detta perpendicolare in E, O, ec. nella medesima ragione, ch'essi segano la retta BN in H, L, ec. e però le distanze BE, BO, ec. dagli elementi al vertice saranno fra loro come le rette BH, BL, ec. tagliate da questi elementi

V &

menti

menti; dunque i quadri di BE, BO, ec. faranno altresì nella stessa ragione de' quadrati di BH, BL, ec. così gli elementi HQ, LV, ec. faranno fra se come i quadri delle lor distanze BE, BO, ec. al vertice B, e perciò essi faranno il terzo del massimo elemento NC moltiplicato per la sua distanza BK al vertice B, come si è dimostrato sopra (N. 677.): ma il rettangolo CN  $\times$  BK equivale al parallelogrammo PBNC d'ugual base ed altezza; onde la somma degli elementi HQ, LV, ec. cioè il semicompimento BNCV è il terzo del parallelogrammo PBNC, e però il semifegmento PBC è li due terzi di questo parallelogrammo; dal che ne segue ad evidenza, che l'intero segmento ABC è i due terzi del parallelogrammo AMNC.

680. COROLLARIO III. *Due segmenti ABC, DEF (Fig. 421.) d'una stessa parabola sono uguali, se hanno le porzioni BP, RE de' lor diametri, comprese in essi segmenti, uguali fra loro.*

I triangoli maggiori ABC, DEF iscritti in questi segmenti sono uguali (N. 674.); onde i parallelogrammi circoscritti, per essere doppi de' triangoli, sono fra se uguali: ora i segmenti sono li due terzi de' loro parallelogrammi (N. 679.); dunque essi sono uguali.

681. PROBLEMA. *Data una parabola VHAS (Fig. 422.) col suo asse AX, da un punto P, che non è sopra l'asse, tirar due tangenti PS, PV.*

Da P tiro un Diametro PHR segante la parabola in H; tiro in H la tangente HT; prendo l'assisa HR uguale a PH, e da R tirando al diametro PR l'ordinata VS segante la parabola in V ed S, da detti punti tiro le rette SP, PV, che son le tangenti ricercate. Poichè, essendo la retta SP tirata dall'estremità S dell'ordinata RS, e la retta PR essendo divisa per mezzo in H, egli è manifesto, che PR è suttangente, e PS tangente; e per la stessa ragione PV è altresì tangente.

682. COROLLARIO I°. *Da un punto esterior P non si possono alla parabola tirar che due tangenti.*

Ciò è ad evidenza palese; poichè, qualunque altra linea, che si tirasse dal punto P, passerebbe o infra i due punti V, S del contatto, o al di fuori: così nel primo caso ella segherebbe la parabola, e nel secondo essa farebbe interamente fuori della curva, senza ne meno toccarla.

683. COROLLARIO II. *Le due tangenti PS, PV, le quali da un punto esterior P, che non è sopra l'asse, tirar si possono alla parabola, son necessariamente disuguali.*

Dal

Dal punto H io tiro l'ordinata HM all' asse . Essendo 'l triangolo XHR rettangolo in H, l'angolo HRX è acuto, e 'l suo con-  
leguente HRV ottuso. Ora, i due triangoli PRS, PRV hanno 'l  
lato PR comune, e 'l lato RS uguale al lato RV; ma l'angolo  
contenuto PRS è minor dell'angolo contenuto PRV; dunque la  
base PS è minore della base PV.

684. COROLLARIO III. *Al contrario, le due tangenti TH, TL, le quali tirar si possono da un punto T preso sopra l'asse, son' uguali.*

Imperciocchè, prendendo l'affissa AM uguale a TA, e tirando la doppia ordinata HL, le due tangenti passeranno per i punti H, L; e poichè i triangoli rettangoli TMH, TML hanno 'l lato TM comune, e 'l lato HM uguale al lato ML, è evidente, che 'l terzo TH equivale al terzo TL.

685. DIFFINIZIONE. Due parabole ABC, *abc* ( Fig. 423. ), le quali abbiano differenti parametri BR, *br*, e sieno terminate dalle basi AC, *ac*, son dette *Simili*, quando iscritta nell'una d'esse qualsivoglia figura AMBNC, si possa nell'altra iscrivere una simile *ambnc*.

686. PROBLEMA. *Data una parabola ABC ( Fig. 423. ) con un' altro parametro br descriverne un'altra abc simile alla data.*

Descrivasi una parabola, la cui distanza dalla direttrice al fuoco sia uguale alla metà del parametro *br*: ciò fatto, suppongo che la linea dell'affisse sia la retta indefinita *bx*; piglio una quarta proporzionale al parametro BR della data parabola, alla sua altezza PB e al parametro *br*, e portando la stessa sopra *bx* da *b* in *p*, pel punto *p* tiro la base *ac*; e dico, che la parabola *abc*, terminata dalla doppia ordinata, o base *ac*, è simile alla data ABC, terminata dalla doppia ordinata, o base AC.

Imperocchè, sieno nella parabola ABC tirate la doppia ordinata MN, e le corde MB, MA, BN, NC; divido l' altezza *bp* in *t* nella medesima ragione che l'altezza BP lo è in T, e pel punto *t* tirando la doppia ordinata *mn* e poscia le corde *mb*, *ma*, *nb*, *nc*, la figura iscritta *ambnc* è simile all' iscritta AMBNC; e per conseguenza le due parabole son simili: il che io provo in questo modo.

Per la proprietà della parabola, noi abbiamo  $\overline{TN} = TB \times BR$ ;  
dunque : : TB . TN . BR, e però  $\overline{TB} . \overline{TN} : : TB . BR$   
(N. 393.):

( N. 393. ) : similmente nella parabola  $abc$ , noi troveremo  $tb. tn$  : :  $tb. br$ ; ma  $TB. tb$  : :  $BP. bp$ , e  $BP. bp$  : :  $BR. br$ ; onde  $TB. tb$  : :  $BR. br$ , ovvero  $TB. BR$  : :  $tb. br$ , e per conseguenza  $TB. TN$  : :  $tb. tn$ ; dal che si deduce  $TB. TN$  : :  $tb. tn$ . Così i due triangoli rettangoli  $BTN$ ,  $bnn$  son simili, e perciò l'intero triangolo  $MBN$  è simile all'intero triangolo  $mnn$ .

Tiro le rette  $TC$ ,  $TA$ ,  $te$ ,  $ta$ , e proverò come sopra, che  $PC. PT$  : :  $pc. pt$ , e ch' in conseguenza il triangolo  $TPC$  è simile al triangolo  $tpc$ ; il che rende pure simili i triangoli  $ATC$ ,  $ate$ . Finalmente, siccome a motivo de' triangoli simili  $TPC$ ,  $tpc$  abbiamo  $TC. te$  : :  $TP. tp$ , e perchè  $TP. tp$  : :  $BT. bt$ , avremo  $TC. te$  : :  $BT. bt$ ; ma egli s'è già trovato  $BT. bt$  : :  $TN. tn$ ; dunque  $TC. te$  : :  $TN. tn$ : ora, a cagione degli angoli retti  $PTN$ ,  $ptn$ , e degli uguali  $PTC$ ,  $ptc$ , gli angoli  $CTN$ ,  $ctn$  sono altresì uguali; però i due  $CTN$ ,  $ctn$  son simili, perchè i lati  $TC, te$ , e  $TN, tn$ , che comprendono gli stessi angoli, sono proporzionali; e quindi n' avviene essero ancora simili gli altri due triangoli  $MTA$ ,  $mta$ . Così, per essere le figure iscrritte  $AMBNC$ ,  $ambnc$  composte d'un'egual numero di triangoli simili ciascuno a ciascuno, son simili fra loro.

687. COROLLARIO I°. *Le parabole simili sono fra loro come i quadri delle lor basi, o de' loro lati omologhi.*

Noi abbiain ritrovato  $PC. pt$  : :  $PT. pt$ , e poichè  $PT. TB$  : :  $pt. tb$ , avremo componendo  $PT. PB$  : :  $pt. pb$ , ovvero  $PT. pt$  : :  $PB. pb$ ; onde  $PC. pc$  : :  $PB. pb$ : ora la semiparabola  $BPC$  è i due terzi del rettangolo  $PC \times PB$ , e l'altra  $bpc$  li due del rettangolo  $pc \times pb$ ; e questi due rettangoli, avendo i lati proporzionali, sono fra essi come i quadri de' loro lati omologhi; dunque le due semiparabole, e conseguentemente le due parabole sono fra se come i quadri de' loro lati omologhi.

688. COROLLARIO II. *Tutte le parabole possono esser simili.*

Imperocchè basta prender l'assisse  $BP$ ,  $bp$  in egual ragione de' parametri  $BR$ ,  $br$ , e quindi per i punti  $P$ ,  $p$  tirar le basi  $AC$ ,  $ac$ .

Delle

*Dell' Elisse considerata sopra un piano fuori del Cono.*

689. PROBLEMA. *Costruire un' Elisse.*

Piglio due rette  $AB$ ,  $CD$  ( *Fig. 424.* ) fra lor disuguali , e con esse io formo un'angolo retto, tal che si seghino per mezzo in  $O$ . Preso questo punto per centro , con un raggio uguale alla metà  $OA$  della maggiore delle due linee descrivo un circolo  $AEBH$ ; da amendue le parti prolungo  $CD$  fino alla circonferenza del circolo in  $H$  ed  $E$  ; poi , dividendo  $AB$  in più parti uguali , alzo delle perpendicolari  $AN$ ,  $ST$ , che d' ambe le parti terminino alla circonferenza. Ciò fatto , comincio dal semicircolo  $AEB$  , e cerco una quarta proporzionale al raggio  $OE$ , alla retta  $OD$  e alla perpendicolare  $MN$ , la quale ritrovata , io lo porto sopra  $MN$  da  $M$  in  $R$ : cerco parimente una quarta proporzionale  $SV$  alle due  $OE$ ,  $OD$ , e alla perpendicolare  $ST$  ; continuo nello stesso modo a cercar sempre delle quarte proporzionali alle due linee  $OE$ ,  $OD$ , e ad alcuna delle perpendicolari del semicircolo  $AED$ , e faccio passare una curva  $ARVDPB$  per l' estremità delle dette proporzionali. Lo stesso io faccio rispetto al semicircolo  $AHB$ , ed ho una curva  $ADBC$ , la cui retta  $AB$  è un' asse, poichè sega per mezzo tutte le linee  $NR$ ,  $SV$ , su cui ella è perpendicolare ; e la linea  $CD$  è l' altro, poichè ancor' essa sega per mezzo tutte le linee parallele ad  $AB$ , che dall' una e dall' altra parte terminano alla curva , siccome mostreremo a suo luogo. Or solo resta a far vedere , che quella curva è un' Elisse ; il che io così dimostro.

Per la costruzione , noi abbiamo  $OE . OD :: MN . MR$ , ed  $OE . OD :: ST . SV$ ; dunque  $MN . MR :: ST . SV$ , ovvero  $MN . ST :: MR . SV$ , cioè l' ordinate  $MR$ ,  $SV$ , ec. della curva  $ADBC$  sono fra loro come l' ordinate  $MN$ ,  $ST$ , ec. del semicircolo  $AEB$ ; e conseguentemente, innalzando'l tutto al quadrato , avremo  $\overline{MR} . \overline{SV} :: \overline{MN} . \overline{ST}$ : ma, per la proprietà del circolo,  $\overline{MN} = \overline{AM} \times \overline{MB}$ , ed  $\overline{ST} = \overline{AS} \times \overline{SB}$ ; onde  $\overline{MR} . \overline{SV} :: \overline{AM} \times \overline{MB} . \overline{AS} \times \overline{SB}$ ; cioè i quadri dell' ordinate  $MR$ ,  $SV$  ec. della curva  $ADBC$  sono fra loro come i rettangoli  $\overline{AM} \times \overline{MB}$ ,  $\overline{AS} \times \overline{SB}$ , ec. delle parti dell' asse  $AB$ , ch' esse tagliano; e per conseguente questa curva è un' Elisse ( *N. 632.* ) .

690. COROLLARIO I°. *Il quadro di qualsivoglia ordinata  $MR$  all'*



all'asse maggiore, o al grand'asse AB è il rettangolo AM × MB delle parti dell'asse, ch'essa taglia, come'l quadro dell'asse minore, o del picciolo asse CD è al quadro del maggiore AB.

Ordinate essendo al grand'asse le rette MR, OD, abbiamo  $\overline{MR} \cdot \overline{OD} : : AM \times MB \cdot AO \times OB$  ( N. 689. ), ovvero  $\overline{MR} \cdot AM \times MB : : \overline{OD} \cdot AO \times OB$ : ma a cagione di AO = OB noi abbiamo  $AO \times OB = \overline{AO}^2$ ; dunque  $\overline{MR} \cdot AM \times MB : : \overline{OD} \cdot \overline{AO}$ : ora, essendo OD il semiasse minore, ed AO il maggiore, i quadrati  $\overline{OD}^2, \overline{AO}^2$  di questa metà sono fra se come i quadri de' loro tutti CD, AO; onde'l quadro dell'ordinata MR è al rettangolo AM × MB, come'l quadro dell'asse minore CD al quadrato dell'asse maggiore AB.

691. DIFFINIZIONE. Se pigliasi una terza proporzionale al grand'asse AB e al picciolo CD, ella si dice *Parametro* del grand'asse; e se prendesi una terza proporzionale all'asse minore CD e al maggiore AB, ella si chiama *Parametro* del picciolo asse.

692. COROLLARIO II. Il quadro di qualsivoglia ordinata MR al grand'asse è al rettangolo AM × MB delle parti dell'asse, ch'essa taglia, come'l parametro del grand'asse AB è a questo stesso asse.

Chiamo *p* il parametro dell'asse maggiore, ed ho : : AB. CD. *p* ( N. 691. ); dunque  $\overline{AB} \cdot \overline{CD} : : AB \cdot p$ , ovvero  $\overline{CD} \cdot \overline{AB} : : p \cdot AB$ . Ora  $\overline{MR} \cdot AM \times MB : : \overline{CD} \cdot \overline{AB}$  ( N. 690. ); onde  $\overline{MR} \cdot AM \times MB : : p \cdot AB$ .

693. COROLLARIO III. Se sopra l'una dell'estremità A del grand'asse AB ( Fig. 425. ) s'alza una perpendicolare AX uguale al parametro di detto asse, e che dall'estremità X della stessa tirisi una retta XB all'altra estremità B dell'asse maggiore, la quale seggi tutte l'ordinate le une al di fuori, e l'altra al di dentro dell'Elisse, dico; che'l quadro di qualsivoglia ordinata MR equivale al rettangolo dell'assisa AM × MV, cioè per la linea MV perpendicolare sopra l'asse maggiore al punto M, e contenuta fra l'asse maggiore, e la retta XB.

Noi abbiamo  $\overline{MR} \cdot AM \times MB : : AX \cdot AB$  ( N. 692. ); ora, a cagione de' triangoli simili VMB, XAB, abbiamo VM = MB

## DELLE MATEMATICHE. 165

MB :: AX. AB, e moltiplicando i due primi termini di questa proporzione per la medesima grandezza AM, avremo VM x AM. AM x MB :: AX. AB; dunque VM x AM. AM x MB :: MR. AM x MB: ma i due conseguenti di questa proporzione son' uguali; onde VM x AM = MR.

694. AVVERTIMENTO. Nella parabola, il quadro d' un' ordinata è sempre uguale al rettangolo della sua affissa pel parametro; nell' elisse, il quadro dell' ordinata al grand' asse è sempre uguale al rettangolo della sua affissa AM per una linea MV minore del parametro di detto asse; e nell' iperbola ( siccome mostreremo a suo luogo ) , il quadro d' un' ordinata ad un' asse è maggiore del rettangolo dell' affissa per lo parametro del medesimo asse. Or' ecco donde trassero l' origine loro i nomi di *Parabola*, d' *Elisse*, ed *Iperbola*; imperocchè Parabola apresso i Greci significa *Uguaglianza*, Elisse significa *Difetto*, ed Iperbola *Ecceffo*.

695. COROLLARIO IV. *L' ordinate SV, XP ( Fig. 424. ) al grand' asse AB, equidistanti dal centro O, son' uguali.*

Per la generazione dell' Elisse noi abbiamo SV. XP :: ST. XZ ( N. 689. ) : ora, nel circolo AEBH, le corde ST, XZ equidistanti dal centro son' uguali; dunque le loro metà ST, XZ sono altresì uguali, ed in conseguenza SV = XP.

696. COROLLARIO V. *Tutte le linee, come RZ ( Fig. 426. ), le quali passano pel centro O d' un' Elisse, e che dall' una e dall' altra parte terminano alla curva, son segate per mezzo nel centro O.*

Dall' uno de' punti R, in cui la retta RZ sega la curva, tiro l' ordinata RM; sopra l' asse piglio la parte OX = OM, e da X tiro la retta XZ parallela ad MR, senza curarmi se 'l punto Z, in cui ella sega RZ, sia, o non sia sopra la curva. I triangoli simili MOR, XOZ, avendo 'l lato MO uguale al lato OX, sono perfettamente uguali; e perciò RO = OZ, ed MR = ZX: ora le rette MR, ZX sono equidistanti dal centro; dunque, poichè MR è un' ordinata al grand' asse, la retta ZX esser dee parimente un' ordinata al medesimo ( N. 695. ); e però il punto Z, in cui ella taglia ZR, trovasi sopra l' Elisse, e ZR è segata per mezzo in O.

697. COROLLARIO VI. *Qualunque linea, come RP ( Fig. 427. ), parallela all' asse maggiore AB, e che dall' una e dall' altra parte termina alla curva, è segata per mezzo in T dall' asse minore CD.*

Tomo II.

X

Da'

Da' punti R, P, in cui RP sega la curva, tiro l'ordinate MR, PX, le quali, parallele essendo fra le parallele MX, RP, sono per conseguenza fra se uguali; così, uguali sono le loro distanze MO, OX al centro O ( N. 695. ): ma a cagione delle parallele MR, OD, XP, uguali sono le parallele MO, RT, non meno che le due OX, TP; dunque, a motivo di  $MO = OX$ , avremo  $RT = TP$ .

698. COROLLARIO VII. Il quadro d'un'ordinata RT all'asse minore CD è al rettangolo delle parti CT, TD di detto asse, ch'ella taglia, come'l quadro dell'asse maggiore AB a quello dell'asse minore CD,

Da R tiro l'ordinata RM all'asse maggiore, ed ho  $\overline{MR} \cdot \overline{AM} \times \overline{MB}$ ; ;  $\overline{OD} \cdot \overline{AO}$  ( N. 690. ): ma essendo AB diviso ugualmente in O, e disugualmente in M, abbiamo  $\overline{AM} \times \overline{MB} = \overline{AO} - \overline{MO}$ , ovvero  $\overline{AM} \times \overline{MB} = \overline{AO} - \overline{RT}$ , a cagione di  $MO = RT$ , e similmente a motivo di  $MR = OT$  abbiamo  $\overline{MR} = \overline{OT}$ ; onde ponendo nella nostra proporzione i valori di  $\overline{MR}$  ed  $\overline{AM} \times \overline{MB}$ , avremo  $\overline{OT} \cdot \overline{AO} - \overline{RT} : : \overline{OD} \cdot \overline{AO}$ , ovvero  $\overline{OD} \cdot \overline{OT} : : \overline{AO} \cdot \overline{AO} - \overline{AO} \cdot \overline{RT}$ , e per conseguenza  $\overline{OD} \cdot \overline{OD} - \overline{OT}^2 : : \overline{AO} \cdot \overline{AO} - \overline{AO} \cdot \overline{RT}$ ; il che riducesi a  $\overline{OD} \cdot \overline{OD} - \overline{OT}^2 : : \overline{AO} \cdot \overline{RT}$ , od  $\overline{RT} \cdot \overline{OD} - \overline{OT}^2 : : \overline{AO} \cdot \overline{OD}$ ; e siccome, a cagione dell'asse CD diviso ugualmente in O e disugualmente in T, abbiamo  $\overline{OD} - \overline{OT} = CT \times TD$ , avremo in fine  $\overline{RT}^2 \cdot CT \times TD : : \overline{AO} \cdot \overline{CO}$ ; cioè l'quadro dell'ordinata RT all'asse minore è al rettangolo CT  $\times$  TD, come'l quadrato del semiasse maggiore a quello del minore, o come'l quadro dell'asse maggiore al quadro del minore,

699. COROLLARIO VIII. Dunque i quadri dell'ordinate all'asse minore sono fra loro come i rettangoli delle parti di detto asse, ch'essi tagliano.

Sieno le due ordinate RT, EF; noi dunque avremo  $\overline{RT}^2 \cdot CT \times TD$

$\times TD :: \overline{AO}, \overline{OD}$ , ed  $\overline{EF}$ .  $CF \times FD :: \overline{AO}, \overline{OD}$ ; onde  
 $\overline{RT}, CT \times TD :: \overline{EF}, CF \times FD$ , ovvero  $\overline{RT}, \overline{EF} :: CT \times TD$ .  
 $CF \times FD$ .

700. COROLLARIO IX. Il quadro d'un'ordinata RT all'asse minore è dunque al rettangolo corrispondente CT x TD, come'l parametro del picciolo asse è allo stesso picciolo asse.

Ciò dimostra, come s'è fatto rispetto all'asse maggiore (N. 692.).

701. COROLLARIO X. Se sopra l'una dell'estremità D dell'asse minore (Fig. 428.) s'alza una perpendicolare DX uguale al suo parametro, e che dal punto X all'altra estremità C tirisi la retta CX, il quadro di qualsivoglia ordinata TP all'asse minore equivale al prodotto dell'affissa TD  $\times$  TH.

Ciò dimostrasi nello stesso modo che s'è fatto rispetto al grand' asse ( N. 693. ) .

702. COROLLARIO XI. Se intorno l'asse minore  $CD$  descrivasi un circolo  $CXD$  ( Fig. 420. ), ei sarà interamente nell'Elisse.

Poichè, tirando all'asse minore l'ordinata  $RT$  segante il circolo in  $X$ , avremo  $\overline{RT} \cdot CT \times TD : \overline{AO} \cdot \overline{OD}$ . Ora, per la proprietà del circolo,  $CT \times TD = \overline{XT}^2$ ; dunque  $\overline{RT} \cdot \overline{XT} : \overline{AO} \cdot \overline{OD}$ : ma  $\overline{AO}$  è maggiore di  $\overline{OD}$ ; perciò  $\overline{RT}$  è altresì maggiore di  $\overline{XT}$ ; cosí'l punto  $X$  del circolo è nell'ellisse; e siccome lo stesso avverrà rispetto a tutte l'ordinate dell'ellisse e del circolo  $CXD$ , ne segue, che detto circolo è iscritto nell'ellisse.

703. COROLLARIO XII. *L'Elisse è media proporzionale fra'l  
circolo circoscritto AEBH, e l'iscritto CXD ( Fig. 429. )*.

Per la natura dell'elisse, qualunque ordinata  $MS$  del circolo circoscritto  $AEBH$  è all'ordinata corrispondente  $MN$  dell'elisse, come il raggio  $OE$ , o la metà  $OA$  dell'asse maggiore è alla metà del minore: donde ne segue, che la somma dell'ordinate del circolo circoscritto, ovvero il circolo circoscritto è alla somma dell'ordinate dell'elisse, o all'elisse, come la metà del grand'asse è alla metà del picciolo, o come l'asse maggiore al minore: così noi

abbiamo  $AEBH$ .  $ADBC :: AB \cdot CD$ . Ora, siccome  $\overline{RT} \cdot \overline{XT}$   
 $:: \overline{AO} \cdot \overline{OD}$  ( N. 699. ), il che ci dà  $RT \cdot XT :: AO \cdot OD$ ,  

X 2
egli

egli è manifesto, che la somma dell' ordinate all' asse minore dell' elisse, cioè l' elisse è alla stessa somma dell' ordinate del circolo iscritto, cioè al circolo iscritto, come AO a OD, o come AB. CD ; e conseguentemente ADBC. CXDV :: AB. CD : ma AEBH . ADBC :: AB . CD ; dunque AEBH . ADBC :: ADBC . CXDV.

704. COROLLARIO XIII. L' ordinate MR, SV, ec. (Fig. 430.) d' un quarto d' Elisse AOD van diminuendo, a misura che s' avvicinano al vertice A dell' asse maggiore ; e se dall' ordinate MN, ST, ec. del quarto di circolo circoscritto AOE si tolgono l' ordinate MN, SV, ec. i residui RN, VT, ec. andran pure diminuendo, a misura che s' avvicineranno ad A, e saran fra loro come l' ordinate MR, SV. ec.

Per la natura dell' elisse, MR. SV :: MN. ST : ma nel circolo AEBH, la corda MN, essendo più distante dal centro O di quello sia la corda ST, è minore di ST ; dunque la sua metà MN è altresì minore della metà ST di ST, e per conseguente MR è pur minore di SV. Ora, poichè abbiamo MR. SV :: MN. ST, ovvero MR. MN :: SV. ST, avremo eziandio MR. MN — MR :: SV. ST — SV, cioè MR. RN :: SV. VT ; e perciò MR. SV :: RN. VT : ma MR è minore di SV ; onde RN è minore di VT.

705. COROLLARIO XIV. Fra tutte le linee RO, VO, ec. ( Fig. 430. ), che da' punti d' un quarto AD di circonferenza d' Elisse tirar si possono al centro O, quelle, che col grand' asse AB formano un' angolo minore, e ch' in conseguenza ne sono più vicine, come RO, son maggiori di quelle, che con detto asse formano un' angolo maggiore, e che ne sono più distanti, come VO.

Da' punti R, V tiro l' ordinate RM, SV all' asse maggiore, e le prolungo fino alla circonferenza del circolo circoscritto in N, e T ; da' punti N, T io tiro al centro le rette NO, TO, che per essere raggi del medesimo circolo son' uguali : così  $\overline{NO} = \overline{TO}$ . Ma il triangolo rettangolo NMO ci dà  $\overline{NO} = \overline{MO} + \overline{MN}$ , e perchè MN è diviso in due parti in R, abbiamo  $\overline{MN} = \overline{MR} + 2\overline{MR} \times \overline{RN} + \overline{RN}$  ; onde  $\overline{NO} = \overline{MO} + \overline{MR} + 2\overline{MR} \times \overline{RN} + \overline{RN}$  : così pure, il triangolo rettangolo TOS ci dà  $\overline{TO} = \overline{SO} + \overline{ST}$ , e poichè ST è diviso in due parti in V, abbiamo

biamo  $\overrightarrow{ST} = \overrightarrow{SV} + 2SV \times VT + \overrightarrow{VT}$ ; e perciò  $\overrightarrow{TO} = \overrightarrow{SO} + \overrightarrow{SV} + 2SV \times VT + \overrightarrow{VT}$ . Ora il triangolo rettangolo RMO ci dà  $\overrightarrow{RO} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{MR}$ ; dunque ciò che manca al quadrato  $\overrightarrow{RO}$ , perchè sia uguale al quadro  $\overrightarrow{NO}$ , è  $2MR \times RN + \overrightarrow{RN}$ : similmente, il triangolo VSO ci dà  $\overrightarrow{VO} = \overrightarrow{SO} + \overrightarrow{SV}$ , e per conseguente quello che manca al quadro  $\overrightarrow{VO}$ , perchè sia uguale al quadrato  $\overrightarrow{TO}$ , è  $2SV \times VT + \overrightarrow{VT}$ : ma MR è minore di SV, ed RN minor di VT ( N. 704. ); però il difetto  $2MR \times RN + \overrightarrow{RN}$  è minore del difetto  $2SV \times VT + \overrightarrow{VT}$ . Così egli manca meno ad  $\overrightarrow{RO}$ , perchè sia uguale ad  $\overrightarrow{NO}$ , di quello manchi ad  $\overrightarrow{VO}$ , perchè sia uguale a  $\overrightarrow{TO}$ , od  $\overrightarrow{NO}$ ; ed in conseguenza  $\overrightarrow{RO}$  è maggiore di  $\overrightarrow{VO}$ , ed RO di VO.

706. COROLLARIO XV. *Dunque fra tutte le linee RH, VL ( Fig. 430. ), che passan pel centro O, e che d' ambe le parci terminano alla cura, le maggiori son quelle, che coll' asse maggiore formano angoli minori.*

Abbiam veduto, che RO è maggior di VO: ora le rette RH, VL, essendo legate per mezzo nel centro O ( N. 696. ), son doppie di RO, VO; dunque RH è altresì maggiore di VL.

707. COROLLARIO XVI. *Se dal centro O d' un' Elisse ( Fig. 431. ) con un raggio OH, maggior del semiasse minore OD e minor del semiasse maggiore OA, descrivessi un circolo, ei segnerà l' Elisse in quattro punti M, N, S, R, per cui all' asse maggiore tirar si possono due doppie ordinate MN, RS fra loro uguali, e due altre MR, NS al minore altresì uguali fra loro.*

1°. E' manifesto, che questo circolo dee segar l' Elisse; poichè, pigliando sopra'l grand' asse la parte TO uguale al raggio HO, la circonferenza del circolo passerà pel punto T, e però ella non potrà da H pervenire al punto T, senza segar' il quarto d' Elisse AC.

2°. Detto circolo dee segar l' Elisse in quattro punti; imperocchè, siccome'l punto H non può descrivere il quarto di circonferenza HT senza tagliar' il quarto AC dell' Elisse, così egli non può

può nè meno descriver l'altro quarto di circonferenza TE senza legare l'altro quarto di Elisse AD; e lo stesso n'avverrà degli altri due quarti DB, CB.

3°. Descrivendosi dal punto H il quarto di circonferenza HT, ei non può segare il quarto d'Elisse AC che in un sol punto M; imperocchè, se lo segasse anche in un'altro K, tirando da' punti M, K delle rette al centro, le linee MO, KO, essendo raggi del medesimo circolo, sarebbero uguali; e in conseguenza da' due diversi punti M, K d'un quarto d'Elisse AC si potrebbero al centro O tirar due linee uguali MO, KO, il ch'è impossibile; perocchè la più vicina KO all'asse AB è sempre maggiore dell'altra MO (N. 705.): per la stessa ragione, dal punto H descrivendosi il quarto di circonferenza TE, ei non può segare il quarto d'Elisse AD ch'in un sol punto N; e ciò dicasi ancora degli altri quarti DB, CB d'elisse; dunque il circolo non può segare l'elisse ch' in quattro punti.

4°. Essendo il punto T del quarto di circonferenza HMT il più elevato, cioè il più distante dal diametro HE, se dal punto M, in cui questo quarto di circonferenza sega il quarto d'Elisse AC, io tiro una retta MN parallela al diametro HE, ella segnerà il circolo in un'altro punto, p. e. in N, e farà una corda segata per mezzo in P dal raggio OT perpendicolare al diametro HE; così noi avremo  $MN = 2MP$ : ma essendo MP ordinata al grand'asse AO, la doppia ordinata condotta dallo stesso punto M dee parimente esser  $2MP$ ; ond'essa equivarrà ad MN; e per conseguente il punto N, in cui il circolo vien segato dalla corda MN, è lo stesso del punto N, in cui la doppia ordinata all'asse maggiore sega il quarto d'Elisse AP.

Si proverà nella stessa maniera 1°. che la linea, la quale congiugne i punti N, S, è una doppia ordinata all'asse minore. 2°. Che quella, la quale congiugne i punti S, R, è una doppia ordinata all'asse maggiore. 3°. Finalmente, che quella, la quale congiugne i punti R, M, è una doppia ordinata all'asse minore: così, a motivo delle parallele MN, RS, ed NS, MR, la figura MNRS sarà un parallelogrammo rettangolo; e perciò le due doppie ordinate MN, RS non meno che le due NS, MR all'asse minore faranno uguali.

708. PROBLEMA. *Da un punto R preso sopra un'Elisse ADBC (Fig. 432.) tirar una tangente alla curva.*

Da R tiro un'ordinata all'asse maggiore AB; e cercando una  
tetra

terza proporzionale OT alla distanza OM dal centro all'ordinata, e al semiasse maggiore OA, tiro per l'estremità T di questa proporzionale e pel dato punto R la retta TRY, ch'è la tangente ricercata; il che provo in questo modo.

Intorno l'asse maggiore descrivo il circolo AEBH, che sarà circonscritto all'Elisse; prolungo l'ordinata MR, finchè segghi la circonferenza del circolo in N, e da N tirando pel punto T la retta NT, ella toccherà il circolo in N, a cagione di :: OM. OA. OT ( N. 292. ). Sopra l'asse io piglio qualsivoglia altro punto S, da cui tiro una retta SX parallela ad MN, e che segghi la tangente TN in X, la circonferenza del circolo in Z, la retta TR in L, e l'Elisse in V. I triangoli simili MNT, SXT ci danno MN. SX :: MT. ST, e a motivo de' triangoli simili MRT, SLT, abbiamo MR. SL :: MT. ST; dunque MN. SX :: MR. SL, ovvero MN. MR :: SX. SL: ma per la natura dell'Elisse, MN. MR :: SZ. SV; perciò SX. SL :: SZ. SV. Ed essendo TN tangente del circolo in N, la retta SX è maggiore dell'ordinata SZ di detto circolo; onde SL esser dee maggiore di SV, e conseguentemente il punto L della retta TY dee esser fuori dell'Elisse; e siccome lo stesso egli avverrà in qualunque parte dell'asse si pigli il punto S, fuorchè in M, ne segue, che TRY non tocca l'Elisse se non in R.

NOTA. Che se sopra l'estremità A, B del grand'asse s'alzano delle perpendicolari, elle faranno tangenti dell'Elisse, per essere tangenti del circolo circonscritto, sul cui diametro esse faranno perpendicolari: similmente, le perpendicolari innalzate sopra l'estremità dell'asse minore faran tangenti, poichè l'asse minor'è la più grande di tutte le doppie ordinate all'asse maggiore.

709. COROLLARIO I°. Se tirata una tangente TR (Fig. 433.) ad un Elisse, ella si prolunga, finchè segghi in Y l'asse minore CD, e che dal punto del contatto tirisi l'ordinata RQ all'asse minore, s'avrà :: OQ. OD. OY.

Intorno al picciolo asse io descrivo 'l circolo CHDF, il quale sarà iscritto nell'Elisse, e dal punto E, in cui detto circolo sega l'ordinata QR, tirando la retta EY, ella sarà tangente del circolo; imperocchè, da qualsivoglia altro punto P preso sopra l'asse minore tirando parallela a QR la retta PM, che segghi la tangente TY in M, l'elisse in N, la retta YE prolungata in S, e 'l circolo in X, i triangoli simili PMY, QRY ci danno PM. QR :: PY. QY; e a motivo de' triangoli simili PSY, QEY avremo PS. QE :: PY. QY; dunque PM. QR :: PS. QE, ovvero PM.



PM. PS : : QR. QE; ma per la natura dell' Elisse, PN. PX : : QR. QE; onde PM. PS : : PN. PX: ora, essendo TR tangente dell' Elisse in R, la retta PM è maggiore dell' ordinata PN; dunque la retta PS è altresì maggiore di PX, e però il punto S della retta YES è fuori del circolo CHDF; quindi, siccome lo stesso egli avverrà dovunque si pigli'l punto P, eccettuato in Q, ne segue, che la retta YE è tangente del circolo in E, e ch' in conseguenza dobbiamo avere : : OQ. OD. OY ( N. 292. ).

Dal che ne nasce, che dato un punto R sopra un' Elisse ( Fig. 432. 433. ) egli è indifferente tirar l'ordinata MR al grand' asse ( Fig. 432. ), o pure l' ordinata RQ al picciolo ( Fig. 433. ): imperocchè nel primo caso, facendo : : OM. OA. OT, il punto, da cui si dovrà tirar la tangente, sarà T; e nel secondo, facendo : : OQ. OD. OY, il punto, da cui dovrà esser tirata la tangente, sarà Y; e detta tangente nell'uno e nell' altro caso sarà sempre la stessa.

710. COROLLARIO II. *Tutte le tangenti, che tirar si possono da ciascun punto della curva ellittica, sono fra se inclinate, e tagliansi fra i loro punti del contatto.*

Se dall'una e dall' altra parte dell' asse vengon tirate le tangenti TP, VQ ( Fig. 434. ), è manifesto, ch' essendo queste linee inclinate sopra detto asse, elle lo sono anche fra loro, e debbon segarsi in un punto R fra i punti del contatto. Lo stesso avverrebbe, se le tangenti fossero tirate da ambe le parti dell' asse minore.

Ma se le tangenti TP, VQ ( Fig. 435. ) son tirate da due punti T, V dalla medesima parte dell' asse, conduco l'ordinate TM, VN: così, rispetto alla tangente TP, noi abbiamo : : OM. OA.

OP, il che ci dà  $OM \times OP = \overline{OA}^2$ ; e rispetto alla seconda, abbiamo : : ON. OA. OQ, ed  $ON \times OQ = \overline{OA}^2$ ; dunque  $OM \times OP = ON \times OQ$ ; dal che io deduco OM. ON : : OQ. OP: ora OM è minore di ON; onde OQ è minore di OP, cioè'l punto P, in cui la tangente TP la più distante dall' asse sega il detto asse, è più lontano dal vertice A che'l punto Q, in cui la tangente VQ sega l' asse. Non può dunque la tangente TP andar' a terminare al punto P, senza segar la tangente QVS: ma ella non può segarla al punto del contatto V, poichè allora TP toccherebbe la curva in due punti T, V, il ch' è impossibi-

le

le ( N. 708. ) ; nè può la stessa segarla infra V e Q, perocchè in tal caso dovrebbe passare fra'l punto V del contatto e l' asse, ed in conseguenza non farebbe più tangente; però ella dee necessariamente segarla in qualche punto Z fra T ed V.

711. COROLLARIO III. *Da uno stesso punto non si possono tirare due tangenti.*

Ciò provasi, come s'è fatto per la parabola ( N. 646. ).

712. COROLLARIO IV. *Se da un punto R tirasi una tangente RP ( Fig. 436. ), e se dal punto del contatto R al grand' asse tirasi un'ordinata MR, avremo PA. AM :: PB. MB.*

Sopra l'asse maggiore io descrivo l' circolo circoscritto, e prolungando l'ordinata fino alla circonferenza in N, la retta NP è tangente del circolo ( N. 708. ), e la retta MN è l'ordinata di questo circolo condotta dal punto del contatto N; però noi abbiamo PA. AM :: PB. MB ( N. 296. ), cioè la secante PB, che passa pel centro O dell' Elisse, è divisa armonicamente.

713. COROLLARIO V. *Poste le medesime cose del Corollario precedente, se dal punto P (Fig. 437.) tirasi una secante PZ; che non passi pel centro dell'elisse, e che sia segata dalla curva e dall' ordinata RM ne' punti X, Z, V, s' avrà ancora PX. XV :: PZ. VZ.*

Descrivo l' circolo circoscritto, e prolungando l' ordinata MR in N, la retta PN è tangente del circolo, ed MN è la sua ordinata condotta dal punto del contatto.

Da' punti X, Z tiro le rette QE, TH, finchè s'eghino la circonferenza in E, H, e l'asse in Q, T; così, per la natura dell' elisse, io ho QX. TZ :: QE. TH: da' punti E, P tiro la retta PH, senza curarmi s'ella s'eghi TH in H, ovvero in qualche altro punto, ch'io chiamo y. I triangoli simili PQX, PTZ ci danno QX. TZ :: PQ. PT, e per i triangoli simili PQE, PTy abbiamo QE. Ty :: PQ. TP; onde QX. TZ :: QE. Ty: ma QX. TZ :: QE. TH; però QE. TH :: QE. Ty, e per conseguente TH = Ty, cioè la retta Py è simile a PH. Ora, PH è una secante del circolo divisa armonicamente dal circolo, e dall'ordinata MN condotta dal punto del contatto N (N. 296.); e a cagione delle parallele QE, MN, TH la retta PZ è segata in X, V, Z nella stessa ragione della retta PH: dunque PX. XV :: PZ. VZ.

714. COROLLARIO VI. *Ponendo sempre la tangente RP (Fig. 438.) e l' ordinata RM condotta dal punto del contatto, se tirasi l'asse minore CD, s' avrà PA. PM :: PO. PB.*

Descrivo l' circolo circoscritto, prolungo l'ordinata in N, e dal

punto N tiro la tangente PN; così, per rispetto al circolo,  $PA : PM :: PO : PB$  ( N. 294. ) : ma queste linee son le stesse rispetto all'elisse; dunque, ec.

715. COROLLARIO VII. *Poste le medesime cose del precedente Corollario, se dall'estremità A, B dell'asse s'alzano sopra detto asse delle perpendicolari AH, BL fino al concorso della tangente PRL, il rettangolo AH × BL di queste due perpendicolari equivale al quadro del semiasse OD.*

Prolungo l'asse minore fino al concorso della tangente in E. Simili essendo i triangoli PAH, PMR, POE, PBL, le lor basi AH, MR, OE, BL sono fra se come le loro altezze PA, PM, PO, PB: ma noi abbiamo  $PA : PM :: PO : PB$  ( N. 714. ); onde  $AH : MR :: OE : BL$ , e perciò  $AH \times BL = MR \times OE$ .

Dal punto R tiro l'ordinata RT al picciolo asse, il che mi dà  $MR = OT$ : ora, a motivo della tangente RE, e dell'ordinata RT, condotta dal punto del contatto, abbiamo:  $OT$ , od  $MR$ .

$OD \cdot OE$ ; e però  $\overline{OD} = MR \times OE$ : ma noi abbiain ritrovato

$AH \times BL = MB \times OE$ ; dunque  $AH \times BL = \overline{OD}$ .

716. COROLLARIO VIII. *Supponendo sempre la tangente PR (Fig. 439.), e l'ordinata RM all'asse condotta dal punto del contatto R, il rettangolo AM × MB delle parti dell'asse segnato dall'ordinata RM equivale al rettangolo PM × MO della sustangente PM per la distanza MO dall'ordinata RM al centro O.*

Descrivo 'l circolo circoscritto, e prolungando l'ordinata in N, la retta PN è tangente del circolo in N; onde tirando al centro la retta NO, il triangolo PNO è rettangolo: ora, essendo l'ordinata MN al circolo abbassata dall'angolo retto N di detto triangolo perpendicolarmente alla sua ipotenuſa, abbiamo  $\overline{MN} = PM$

$\times MO$ , e per la proprietà del circolo si ha  $\overline{MN} = AM \times MB$ ; dunque  $PM \times MO = AM \times MB$ .

717. COROLLARIO IX. *Poste ancora le medesime cose, se dal punto del contatto R (Fig. 440.) s'alza una perpendicolare RS alla tangente RP, detta perpendicolare segnerà l'asse maggiore in un punto S tra l'ordinata RM e 'l centro O.*

La retta NO, tirata dal punto del contatto N del circolo circoscritto al centro O, è perpendicolare alla tangente PN del circolo; e poichè le due linee PR, PN si segano in P, è manifesto,

## DELLE MATEMATICHE. 171

no, che la perpendicolare SR a PR, essendo prolungata, sarà obliqua sopra PN, e forterà sopra PN dalla parte di P un'angolo acuto PXR, a cagione che'l triangolo PRX è rettangolo in R: così RS vie più s'allontanerà da NO; ed in conseguenza, segnerà il diametro fra l'ordinata MR e'l centro O, in cui va a terminare NO.

NOTA. Che se dal punto R tirasi l'ordinata RT all' asse minore, la perpendicolare RZ segnerà quell' asse di là dal centro O rispetto all' ordinata RT; il che non ha bisogno di dimostrazione.

718. COROLLARIO X. *Poste le medesime cose del precedente Corollario; dico, che la superperpendicolare MS ( Fig. 440. ) è alla distanza MO dall' ordinata MR al centro O, come l' parametro del grand' asse è alle stesso grand' asse.*

Per la natura dell' elisse noi abbiamo, chiamando P il parametro dell' asse maggiore,  $\overline{MR} \cdot \overline{AM} \times \overline{MB} : : P \cdot \overline{AB}$  ( N. 692. ). Ora, a motivo del triangolo rettangolo PRS e della retta RM perpendicolare all' ipotenusa PS, noi abbiamo  $\overline{MR} = \overline{PM} \times \overline{MS}$ , e dall' altra parte,  $\overline{AM} \times \overline{MB} = \overline{PM} \times \overline{MO}$  ( N. 716. ); onde sostituendo nella nostra proporzione questi valori, avremo  $\overline{PM} \times \overline{MS} \cdot \overline{PM} \times \overline{MO} : : P \cdot \overline{AB}$ : ma poichè i rettangoli  $\overline{PM} \times \overline{MS}$ ,  $\overline{PM} \times \overline{MO}$  hanno una comun dimensione PM, sono fra se come le lor dimensioni disuguali MS, MO; dunque  $\overline{MS} \cdot \overline{MO} : : P \cdot \overline{AB}$ .

NOTA. Si proverà nella stessa maniera, che se dal punto R all' asse minore si tira l' ordinata RT, la superperpendicolare TZ è alla distanza TO dall' ordinata al centro, come l' parametro dell' asse minore è al medesimo picciolo asse. Nel resto c' scorgesi facilmente, che quanto s' è detto ne' precedenti Corollarj circa l' asse maggiore si può eziandio riferire all' asse minore, se pur s' eccettua ciò, ch' abbiain fatto osservare nella nota dell' anzidetto Corollario.

719. DIFFINIZIONE. Se data un' Elisse ADBC ( Fig. 441. ) dall' una dell' estremità D dell' asse minore CD con un raggio uguale al semiasse maggiore AO descrivesi un' arco HX, che scghi l' asse maggiore in due punti H, X, questi si chiamano i Fuochi dell' Elisse; ed è facile conoscere, che detti fuochi son' equidistanti dal centro O, a cagione de' triangoli rettangoli uguali DHO, DOX.

720. COROLLARIO. *Dall' accennata diffinizione ne risulta,*  
 $\overline{Y} \quad \overline{Z}$ 
*che*

che'l rettangolo  $AH \times HB$  delle parti  $AH$ ,  $HB$  dell' asse segato dall' uno de' fuochi  $H$  equivale al quadro della metà  $OD$  dell' asse minore.

Poichè il triangolo rettangolo  $HOD$  ci dà  $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{HD} - \overrightarrow{HO}$ , ovvero  $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{AO} - \overrightarrow{HO}$ , per essere  $HD = AO$ : ma essendo l' asse maggiore  $AB$  diviso in due parti uguali in  $O$ , e disuguali in  $H$ , abbiamo  $AH \times HB = \overrightarrow{AO} - \overrightarrow{HO}$ ; dunque  $AH \times HB = \overrightarrow{OD}$ , e così ancora  $AX \times XB = \overrightarrow{OD}$ .

721. PROPOSIZIONE CXXXVII. *Data una tangente PR (Fig. 442.), e l'ordinata RM al grand' asse condotta dal punto del contatto R; dico, che se descrivesi 'l' circolo circonscritto, e che da' punti T, S, in cui egli sega la tangente PRL, s'alzino delle perpendicolari TH, SX alla tangente, elle passeranno per i fuochi H, X dell' Elisse.*

Poichè la retta  $TS$  è corda del circolo circonscritto, le rette  $Tt$ ,  $SQ$ , alzate perpendicolarmente all' estremità di detta corda, son due corde uguali dello stesso circolo circonscritto (N. 265.); e perchè il diametro  $BA$  del circolo sega queste corde obliquamente, le parti  $TH$ ,  $tH$  della corda  $Tt$  son' uguali ciascuna a ciascuna alle parti  $SX$ ,  $XQ$  della corda  $SQ$  (N. 266.). Ciò posto.

Dall' estremità  $A$ ,  $B$  dell' elisse io tiro le tangenti  $AN$ ,  $BL$ , che s'eghino la tangente  $PL$  in  $N$  ed  $L$ . Simili essendo i triangoli rettangoli  $PBL$ ,  $PSX$ , a cagione dell' angolo acuto  $P$  ch' è loro comune, ci danno  $PB : PS :: BL : SX$ , e a motivo de' triangoli rettangoli simili  $PTH$ ,  $PAN$  abbiamo  $PT : PA :: TH : AN$ ; ora le rette  $PB$ ,  $PS$ , essendo secanti del circolo, ci danno  $PB : PS :: PT : PA$  (N. 272.); dunque  $BL : SX :: TH : AN$ , ed in conseguenza  $BL \times AN = SX \times TH$ : ma  $BL \times AN = \overrightarrow{OD}$  (N. 715.); onde  $SX \times TH = \overrightarrow{OD}$ , ovvero  $tH \times TH = \overrightarrow{OD}$ , a cagione di  $tH = SX$ : ora le rette  $tT$ ,  $AB$ , essendo corde del circolo circonscritto, che si segano in  $H$ , abbiamo  $tH \times TH = AH \times HB$  (N. 279.); dunque  $AH \times HB = \overrightarrow{OD}$ , cioè 'l' rettangolo delle parti disuguali  $AH$ ,  $HB$  del grand' asse equivale al quadro della metà  $OD$  del picciolo, e però il punto

punto H è l'uno de' fuochi dell' elisse ( N. 720. ) : proveremo nella stessa maniera, che'l punto X è l'altro.]

722. COROLLARIO I°. Se data una tangente PR ( Fig. 443. ) da' due fuochi H, X dell' elisse tiransi delle rette HR, XR al punto del contatto R, uguali sono gli angoli HRT, XRS formati dalle stesse rette colla tangente PS.

Descrivo'l circolo circonscritto, e da' punti T, S, in cui la sua circonferenza sega la tangente PS, alzando delle perpendicolari TH, SX, che passino per i fuochi H, X ( N. 721. ), i triangoli HRT, XRS son rettangoli, e i triangoli simili HTP, XSP ci danno  $HT : XS :: PT : PS$ ; tiro l'ordinata MR, ch' io prolungo fino alla circonferenza del circolo in N, e tirando NP, ella sarà tangente del circolo; dunque la secante PS, essendo divisa in R dalla ordinata NM condotta dal punto del contatto, ci dà  $PT : TR :: PS : RS$  ( N. 296. ), ovvero  $PT : PS :: TR : RS$ ; onde  $HT : XS :: TR : RS$ , e per conseguenza i triangoli rettangoli HTR, XSR son simili, e l'angolo HRT equivale all'angolo XRS.

723. COROLLARIO II. Se da' fuochi H, X ( Fig. 443. ) d' un' elisse tiransi delle rette al punto R, in cui una tangente qualunque tocca l' elisse, la somma di queste due rette HR, XR è uguale al grand' asse AB.

Descrivo'l circolo circonscritto, e dal centro O tiro la retta OS all'uno de' punti S, in cui'l circolo sega la tangente TS; alzo in S la retta SX perpendicolare alla tangente, la quale passa pel fuoco X, e prolungo XS fino al concorso in V della retta HR prolungata.

L'angolo SRV, essendo uguale all'angolo TRM che gli è opposto al vertice, è per conseguenza uguale all'angolo XRS, ch' equivale all'angolo TRH ( N. 722. ); così i triangoli rettangoli XRS, SRV son simili ed uguali a motivo del lato comune RS, e perciò  $XS = SV$ ; ora, per la definizione de' fuochi, si ha  $XO = OH$ ; la retta OS è dunque parallela alla retta HV, e i triangoli simili HXV, OXS ci danno  $HV : OS :: HX : OX$ ; ma HX è'l doppio di OX; dunque HV è parimente'l doppio di OS; ora, a cagione de' triangoli rettangoli simili ed uguali XRS, RSV, abbiamo  $XR = RV$ ; onde  $HV = HR + RV = HR + XR$ , e però  $HR + RX$  è'l doppio di OS, od OB, cioè  $HR + RX = AB$ .

724. AVVERTIMENTO. Siccome non evvi alcun punto R sopra

sopra la curva dell'elisse, a cui non si possa tirare una tangente, così ne segue, che lo stesso non può dirsi, dove le rette  $HR$ ,  $RX$  tirate dal fuoco non sieno similmente eguali all'asse.

Quindi egli può agevolmente descrivere un'elisse, di cui sieno dati il grand'asse  $AB$ , ed i fuochi  $H$ ,  $X$ ; poichè, se prendesi un filo uguale alla lunghezza  $AB$ , e che attaccate le sue due estremità ai due fuochi  $H$ ,  $X$  ci si tenga sempre teso con uno stilo, che si farà girare intorno ai due fuochi fino a tanto che ritorni allo stesso punto, da cui era partito, la punta dello stilo descriverà una curva ellittica; perocchè in qualsivoglia parte  $R$  ritrovisi questa punta, s'avrà sempre  $HR + RX = AB$ .

725. DIFFINIZIONE. Qualunque retta linea, che passa pel centro d'un'Elisse, e che d'ambe le parti termina alla curva, dicesi *Diametro*; potendosi facilmente ritrovare infinite linee parallele, terminate dall'una e dall'altra parte alla curva, le quali saranno segate ciascuna per mezzo da esso diametro, come diremo in altro luogo.

726. PROPOSIZIONE CXXXVIII. Se dato l'asse maggiore  $AB$  (Fig. 444.) e un diametro  $RS$ , da' vertici  $A$ ,  $R$  tiransi delle tangenti  $AZ$ ,  $RP$ , le quali si sghino in  $X$ , i triangoli  $PXA$ ,  $ZXR$ , formati dalle stesse tangenti coll'asse e col diametro, son' uguali.

Da  $R$  tiro l'ordinata  $RM$  al grand'asse  $AB$ , ch'è parallela alla tangente  $AZ$ , per essere sì l'una che l'altra perpendicolare al predetto asse; e dal punto  $A$  tiro la retta  $AH$  parallela alla tangente  $RP$ . A cagione della tangente  $RP$ , e dell'ordinata  $RM$ , condotta dal punto del contatto, abbiamo  $OM$ .  $OA :: OA$ .  $OP$  (N. 708.): ora i triangoli simili  $OMR$ ,  $OAZ$  ci danno  $OR$ .  $OZ :: OM$ .  $OA$ ; dunque  $OR$ .  $OZ :: OA$ .  $OP$ ; e per conseguenza tirando le rette  $RA$  e  $ZP$ , queste due linee son parallele, e i triangoli  $ARP$ ,  $ARZ$ , i quali sono fra esse ed hanno la stessa base  $RA$ , sono uguali; però dall'uno e dall'altro levando il triangolo  $RZA$ , avremo  $PXA = ZXR$ .

727. COROLLARIO. Poste le stesse cose, se dal punto del contatto  $R$  della tangente  $RP$  condotta pel vertice del diametro  $RS$  tirasi l'ordinata  $RM$  al grand'asse, il triangolo  $RPM$  formato dalla tangente, dall'ordinata e dal grand'asse equivale al quadrilatero  $ZAMR$  formato dalla tangente dell'asse, dall'ordinata  $RM$ , dall'asse, e dal diametro,

I triangoli  $PXA$ ,  $ZXR$  son' uguali (N. 726.); però all'uno e all'altro lato sommando la parte comune  $RXAM$ , avremo  $RPM = ZAMR$ .

NOTA.

## DELLE MATEMATICHE. 175

**NOTA.** Questa Proposizione e' il suo Corollario sono di molta importanza per ben comprendere quello che segue.

**728. PROPOSIZIONE CXXXIX.** *Se dato l'asse maggiore AB ( Fig. 445. 446. 447. 448. 449. ) un diametro RS, e le loro tangenti AZ, RP condotte da' vertici, tiransi da qualsivoglia punto E preso sopra la curva due parallele alle tangenti, il triangolo EHV formato da esse e dal grand' asse equivale al trapezoide AZTV, formato dalla tangente del grand' asse, e dalla sua parallela TV compresa fra l' asse, e'l diametro; e'l triangolo TEL, formato dalle due parallele e dal diametro RS, equivale al trapezoide RPHL formato dalla tangente di detto diametro, e dalla sua parallela compresa fra l' asse e'l diametro.*

Esamineremo i varj casi, che quì si contengono, cominciando dal triangolo formato dalle due parallele coll' asse A...

1°. Se'l punto E, da cui tiransi le parallele TV, HL, è fra l' asse e'l diametro (Fig. 445. ), già sappiamo, che'l triangolo PRM è uguale al trapezoide ZAMR ( N. 727. ). Ora i triangoli PRM, HEV, essendo simili, sono fra se come i quadri de' loro lati omologhi RM, EV; onde  $PRM : HEV :: RM^2 : EV^2$ ; ma per la

natura dell' ellipse,  $RM^2 : EV^2 :: AM \times MB : AV \times VB$  ( N. 689. ), e a motivo di AB, diviso in due parti uguali in O e in due disuguali in M, abbiamo  $AM \times MB = AO^2 - MO^2$ , e per la stessa ragione  $AV \times VB = AO^2 - VO^2$ ; dunque  $PRM : HEV :: AO^2 - MO^2 : AO^2 - VO^2$ , e'n vece de' quadri  $AO$ ,  $MO$  ed  $VO$  ponendo i triangoli simili AZO, VTO, MRO, che son nella medesima ragione, perchè le rette AO, MO ed VO sono i loro lati omologhi, avremo  $PRM : HEV :: AZO - MRO : AZO - VTO$ , cioè  $PRM : HEV :: AZRM : AZTV$ ; ma  $PRM = AZRM$  ( N. 727. ); però  $HEV = AZTV$ .

2°. Se'l punto E, da cui tiransi le parallele (Fig. 446. ), è fra'l diametro RS e l' asse minore CD, i triangoli simili PRM, HEV ci daran sempre  $PRM : HEV :: RM^2 : EV^2$ , e così noi avremo ancora  $RM^2 : EV^2 :: AO^2 - MO^2 : AO^2 - VO^2 :: AZO - MRO : AZO - VTO :: AZRM : AZTV$ ; onde  $PRM : HEV :: AZRM : AZTV$ , e perciò  $HEV = AZTV$ , a cagione di  $PRM = AZRM$ .

Se



3°. Se'l punto E, da cui si tiran le parallele ( Fig. 447. ), è al di sotto dell' asse minore CD, la tangente AZ e la sua parallela EV più non formeranno un trapezoide: ma all' altro termine B del grand' asse tirando la tangente Bz, che segghi'l diametro RS in z, detta tangente colla sua parallela, coll' asse e col diametro formerà il trapezoide VTzB. Ora, i triangoli simili PRM, HEV ci daran sempre  $PRM. HEV :: \overline{RM}. \overline{EV}$ , e noi avremo parimente  $\overline{RM}. \overline{EV} :: \overline{AO} - \overline{MO}. \overline{OB} - \overline{OV} :: AZO - MRO. OBz} - OVT :: AZRM, VTzB$ ; dunque  $PRM. HEV :: AZRM. VTzB$ , e perciò  $HEV = VTzB$ , a motivo di  $PRM = AZRM$ .

4°. Se'l punto E ( Fig. 448. ) trovasi dall' altro lato dell' asse maggiore, s' avrà sempre  $PRM. HEV :: \overline{AO} - \overline{MO}. \overline{AO} - \overline{VO} :: AZO - MRO. AZO - VTO :: AZRM. AZTV$ ; dunque  $PRM. HEV :: AZRM. AZTV$ , ed in conseguenza  $HEV = AZTV$  siccome  $PRM = AZRM$ .

5°. Finalmente, se E trovasi sopra'l quarto di elisse DB ( Fig. 449. ), dall' altra estremità B dell' asse io tiro la tangente Bz, e trovo ancora  $PRM. HEV :: \overline{RM}. \overline{EV} :: \overline{AO} - \overline{MO}. \overline{BO} - \overline{VO} :: AZO - MRO. BOz} - VOT :: AZRM. BVTz$ ; e per conseguente  $HEV = BVTz$  siccome  $PRM = AZRM$ . Passiam' ora al secondo triangolo.

1°. Se'l punto E trovasi fra l' asse e'l diametro ( Fig. 445. ), il triangolo formato dalle parallele e dal diametro è TEL: ora  $PRM = AZRM$ ; dunque da una parte togliendo'l triangolo HEV e dall' altra il trapezoide AZTV = HEV, avremo  $PRIH + EVMI = TVMR$ ; e levando la parte comune EVMI, resterà  $PRIH = TERI$ , e ad amendue le parti giugnendo'l triangolo RIL, avremo  $PRLH = TEL$ .

2°. Se'l punto E trovasi fra'l diametro RS e l' asse minore CD ( Fig. 446. ), il triangolo formato dalle parallele e dal diametro RS è TEL. Dall' altro punto e, in cui la parallela EH sega l' elisse, tiro alla tangente AZ dell' asse la parallela *tu*; il che mi dà  $Heu = AZtu$ , come s' è veduto. Ora  $HEV = AZTV$ ; onde da una parte levando  $Heu$  e dall' altra  $AZtu$ , avremo  $euEV = tuVT$ , e sottraendo la parte comune  $euVTL$ , resterà  $TEL = teL$ : ma  $teL = RPHL$ ; dunque  $TEL = RPHL$ .

3°. Se'l punto E trovasi sopra'l quarto d' elisse CB ( Fig. 447. ), dall'

dall'altra estremità B del grand'asse tiro la tangente  $\tau p$  fino al concorso del diametro RS in  $\tau$ , e della tangente PR prolungata in  $p$ .

I triangoli rettangoli simili AZO, BZO son' uguali, a motivo di  $OB = AO$ , ed uguali sono eziandio i triangoli AZO, PRO, a cagione della parte comune ORXA, e del triangolo PAX uguale al triangolo ZXR ( N. 726. ); dunque  $PRO = BOZ$ , e sommando la parte comune RpBO, avremo  $PpB = RpZ$ . Dall'uno e dall'altro lato levo la parte RpBVEL, e resta  $PRLH + HEV = VBZT + LET$ : ora HEV, essendo 'l triangolo formato dalle parallele coll'asse, equivale al trapezoide VBZT; onde il triangolo LET, formato dalle parallele col diametro, equivale al trapezoide PRLH.

4°. Se 'l punto E trovasi dall'altro lato del grand'asse sopra 'l quarto d'Elisse AD (Fig. 448.), dall'altra estremità S del diametro RS tiro la tangente  $\tau p$ , ch'incontri l'asse prolungato in  $p$ , e la sua tangente ZA prolungata in  $\tau$ : così noi mostriamo, come nel precedente caso, che  $pZA = Z\tau S$ , e levando la parte comune SZAHEL resterà  $pSLH + HEV = VAZT + LET$ . Ora il triangolo HEV, formato dalle parallele e dall'asse, equivale al trapezoide VAZT; onde 'l triangolo LET, formato dalle parallele e dal diametro, è uguale al trapezoide pSHL.

5°. Finalmente, se E trovasi nel quarto d'elisse DB (Fig. 449.), dall'estremità S, B del diametro e dell'asse tirando le tangenti Sp, Bz, proveremo, che 'l triangolo LET, formato dalle parallele e dal diametro, equivale al trapezoide HLSp, siccome s'è fatto rispetto al triangolo LET ( Fig. 446. ).

729. COROLLARIO. Qualunque linea Ee ( Fig. 450. ), terminata d' ambe le parti alla curva dell' Elisse, e parallela ad una tangente RP, condotta all'estremità d'un diametro SR, è divisa per mezzo in L dallo stesso diametro, e n' è in conseguenza la doppia ordinata.

Dall'estremità E, e della linea Ee tiro le rette ET, et parallele alla tangente ZA dell'asse, e che seghino 'l diametro in T, t: così, parallele essendo le rette et, eL alle tangenti AZ, RP, il triangolo etL equivale al trapezoide RPHL ( N. 728. ), e per la stessa ragione il triangolo ETL = RPHL; onde  $etL = ETL$ : ora detti triangoli son simili; dunque sono perfettamente uguali, e noi abbiamo  $eL = EL$ . Lo stesso ancora si dimostrerà, purchè s' osservi ciò ch'è stato detto sopra ( N. 728. ), da qualsivoglia punto E dell'elisse la retta Ee sia tirata parallela ad RP.

730. COROLLARIO II. I quadri dell' ordinate ET, IV ( Fig. 451. ) a qualsivoglia diametro RS sono fra loro come i rettangoli  $RT \times TS$ ,  $RV \times VS$  delle parti del diametro tronche dall' ordinate.

Prolungo l'ordinate, finchè seghino l'asse in  $t$ ,  $u$ , e dall' estremità E, I tiro delle rette EL, IH parallele alla tangente dell' asse. I triangoli simili TEL, VIH ci danno  $\overline{TE} \cdot \overline{VI} :: \overline{TEL} \cdot \overline{VIH}$  ( N. 392. ) : ora, essendo le rette EL, ET parallele alle tangenti dell'asse e del diametro, abbiamo  $\overline{TEL} = \overline{RPT}$  ( N. 728. ), e per la stessa ragione  $\overline{VIH} = \overline{RPuV}$ ; dunque  $\overline{TE} \cdot \overline{VI} :: \overline{RPT} \cdot \overline{RPuV}$ ; ma  $\overline{RPT} = \overline{RPO} - \overline{TO}$ , ed  $\overline{RPuV} = \overline{RPO} - \overline{VO}$ ; onde  $\overline{TE} \cdot \overline{VI} :: \overline{RPO} - \overline{TO} \cdot \overline{RPO} - \overline{VO}$ ; e'n vece de' triangoli RPO,  $\overline{TO}$ ,  $\overline{VO}$  ponendo i quadrati  $\overline{RO}$ ,  $\overline{TO}$ ,  $\overline{VO}$ , i quali son nella stessa ragione, perocchè i triangoli essendo simili, sono fra se come i quadri de' loro lati omologhi RO, TO, VO, avremo  $\overline{TE} \cdot \overline{VI} :: \overline{RO} - \overline{TO} \cdot \overline{RO} - \overline{VO}$ . Ora, essendo RS diviso in due ugualmente in O e disugualmente in T, abbiamo  $\overline{RO} - \overline{TO} = \overline{RT} \times \overline{TS}$ ; e perciò anche  $\overline{RO} - \overline{VO} = \overline{RV} \times \overline{VS}$ ; dunque  $\overline{TE} \cdot \overline{VI} :: \overline{RT} \times \overline{TS} \cdot \overline{RV} \times \overline{VS}$ . Lo stesso si dimostrerà, purchè s' osservi ciò ch'è stato detto sopra ( N. 728. ), da qualsivoglia punto dell' ellipse sien tirate l' ordinate ET, IV.

731. PROPOSIZIONE CXL. Dati due diametri MN, RS ( Fig. 452. ) colle tangenti al vertice MX, RX, che si secano in X, se tirasi la retta RM, che congiunge i punti del contatto, e che dal punto X, in cui le tangenti si secano, tirisi pel mezzo L della retta RM la linea XO, ella sarà un diametro, e conseguentemente passerà pel centro O.

A fine di provare, che XO è un diametro, basta far vedere, ch'ella segherà per mezzo tutte le linee parallele ad RM, le quali avranno d' ambe le parti terminate alla curva; e la dimostrazione non sarà dissimile da quella della parabola ( N. 662. ).

732. AVVERTIMENTO. Mediante questa Proposizione, ciò ch'è stato detto sopra rispetto a un'asse e ad un diametro, può altresì dimostrarsi rispetto a due diametri.

Sicco

Sieno p. e. i diametri MN, RS ( Fig. 453. ) colle lor tangenti MT, RP, che si segano in X: dal vertice M tiro la retta MZ parallela alla tangente RP, ed in conseguenza ordinata al diametro RS ( N. 729. ), e dal vertice R la retta RH ordinata al diametro MN; colla retta TM congiungo i punti del contatto R, M, e segnando questa linea per mezzo in L, la retta XL è un diametro ( N. 731. ), e passa pel centro O: ora, essendo RXME un parallelogrammo, ed essendo la sua diagonale RM segata per mezzo in L dalla retta XL, egli è manifesto, che XL prolungata passa per l'angolo E, e che XE è l'altra diagonale. I triangoli simili OEH, OXM ci danno OH. OM :: OE. OX, e a motivo de' triangoli simili OEM, OXR abbiamo OM. OP :: OE. OX; dunque OH. OM :: OM. OP: così pure, i triangoli simili OEZ, OXR ci danno OZ. OR :: OE. OX, e a cagione de' triangoli simili OER, OXT abbiamo OR. OT :: OE. OX, e per conseguenza OZ. OR :: OR. OT; dal che comprendesi, che la linea OP. è divisa ne' punti H, M nella stessa ragione che la linea OT lo è ne' punti Z, R, e ch' in conseguenza parallele sono le rette ZH, RM, TP.

Dunque, 1°. Se dato un diametro MN da un punto R vogliamo tirar' una tangente, conviene da detto punto condurre un'ordinata RH al diametro MN, poi cercar' una terza proporzionale OP alle rette OH, OM; e P sarà 'l punto, in cui la tangente tirata da R segnerà 'l diametro MN: così la stessa operazione, che si fa rispetto a un Diametro, si fa anche rispetto all'asse ( N. 708. ).

Dunque, 2°. I triangoli PXM, TXR, formati dalle tangenti e dai diametri, sono uguali; poichè, a motivo delle parallele TP, RM, i triangoli PRM, TRM, i quali han la base comune RM, son' uguali; e sottraendo 'l triangolo comune RXM, resterà PXM = TXR.

Dunque, 3°. Il triangolo PRH equivale al trapezoide MTRH; imperocchè, uguali essendo i triangoli PXM, TXR, se all' uno e all' altro lato aggiugnesh la parte comune MXRH, s' avrà PRH = MTRH.

Dunque, 4°. Se da qualsivoglia punto E ( Fig. 454. ) preso sopra la curva tiransi delle rette DL, CF parallele alle tangenti, il triangolo LEC, fatto da queste parallele e dal diametro MN, equivale al trapezoide MTFC, fatto dalla tangente MT di questo diametro e dalla sua parallela CF; poichè dal punto R tirando l'ordinata RH al diametro, avremo PRH = MTRH. Ora, simili

essendo i triangoli PRH, LEC, abbiamo  $\overline{PRH} \cdot \overline{LEC} :: \overline{RH} \cdot \overline{CE}$  ( N. 392. ), e perchè RH, CE son' ordinate al diametro MN, abbiamo  $\overline{RH} \cdot \overline{CE} :: \overline{MH} \times \overline{HN} \cdot \overline{MG} \times \overline{CN} :: \overline{MO} - \overline{HO} \cdot \overline{MC} - \overline{CO}$  ( N. 730. ); onde  $\overline{PRH} \cdot \overline{LEC} :: \overline{MO} - \overline{HO} \cdot \overline{MC} - \overline{CO}$ ; e in vece de'quadri  $\overline{MO}$ ,  $\overline{HO}$ ,  $\overline{CO}$  ponendo i triangoli simili MTO, CFO, HRO, che son nella stessa ragione ( N. 392. ), avremo  $\overline{PRH} \cdot \overline{LEC} :: \overline{MTO} - \overline{HRO}, \overline{MTO} - \overline{CFO} :: \overline{MTRH} \cdot \overline{MTFC}$ ; ma  $\overline{PRH} = \overline{MTRH}$ ; dunque  $\overline{LEC} = \overline{MTFC}$ .

Così pure, il triangolo FED formato dalle due parallele e dal diametro RS equivale al trapezoide RPLD fatto dalla tangente RP di questo diametro, e dalla sua parallela DL. Il che si dimostrerà nella stessa maniera, tirando da M al diametro RS l' ordinata MZ.

733. PROPOSIZIONE CXLI. *Dati due diametri MN, RS ( Fig. 455. ) colle lor tangenti MT, RP, feda due punti Q, V presi sopra la curva tiransi fra essi diametri delle rette QL, QK, VH, VF parallele alle tangenti, il trapezoide ELHV, formato da due di dette parallele QL, VH col diametro MN e colla più vicina all'altre due VF, equivale al trapezoide FEQK, fatto dall'altre due parallele VF, QK coll'altro diametro RS e colla più vicina QL all'altre due; e'l trapezoide QLHY, fatto dalle parallele QL, YH col diametro MN e colla più distante YK dall'altre due, equivale al trapezoide FVYK, formato dall'altre due parallele VF, YK col diametro RS e colla più distante YH dalle parallele.*

La dimostrazione è la stessa di quella della parabola ( N. 666. 667. ).

734. PROPOSIZIONE CXLII. *Se due linee HZ, TV ( Fig. 456. 457. 458. ), che d' ambe le parti terminano alla curva, segonsi nell' Elisse, il rettangolo HL x LZ delle parti della prima è al rettangolo TL x LV delle parti della seconda, come 'l quadrato della tangente MX al vertice del diametro della prima è al quadrato della tangente RX al vertice del diametro della seconda.*

La dimostrazione è la stessa di quella della parabola ( N. 668. ) per i tre casi rappresentati dalle figure 456. 457. 458.

735. PROPOSIZIONE GXLIII. *Se due secanti HZ, HV ( Fig. 459. )*

## DELLE MATEMATICHE. 181

( Fig. 459. ) partono da uno stesso punto esteriore  $H$ , il rettangolo della prima  $HZ$  per la sua parte esteriore  $HQ$  è al rettangolo della seconda  $HV$  per la sua parte esteriore  $HL$ , come 'l quadrato della tangente  $RX$  parallela alla prima è al quadrato della tangente  $MX$  parallela alla seconda.

La dimostrazione è simile a quella della parabola ( N. 669. ).

736. PROPOSIZIONE CXLIV. Se dati due diametri, o semidiametri  $MO$ ,  $RO$  ( Fig. 460. 461. ) colle lor tangenti  $MX$ ,  $RX$  tirasi una doppia ordinata  $VZ$  all'uno de' diametri  $RO$ , e che si prolunghi fino al concorso della tangente dell'altro diametro in  $H$ , il rettangolo  $HZ \times HV$  dell'intera linea  $HZ$  per la parte esteriore  $HV$  è al quadrato della parte  $HM$ , ch'ella sega sopra la tangente  $MX$ , come 'l quadrato della tangente  $RX$  del suo diametro è al quadrato della tangente  $MX$  dell'altro.

La dimostrazione di ciò è simile a quella della parabola (N. 672.) per i due casi rappresentati dalle figure 460. 461.

737. PROPOSIZIONE CXLV. Se dati due segmenti  $AMB$ ,  $CRD$  ( Fig. 462. 463. 464. ) le parti  $ML$ ,  $RH$  de' loro diametri comprese in detti segmenti sono fra se come i lor diametri, o semidiametri  $MO$ ,  $RO$ , i triangoli maggiori iscritti in detti segmenti son' uguali.

Tiro le rette  $RD$ ,  $MB$ ; il che mi dà dei triangoli  $RDH$ ,  $MBL$ , che sono le metà de' massimi triangoli iscritti ne' segmenti, poichè hanno la loro cima ai vertici  $R$ ,  $M$  de' diametri, e perchè le lor basi  $DH$ ,  $BL$  son le metà delle basi  $DG$ ,  $AB$  de' segmenti: così, quello che noi diremo de' triangoli  $RDH$ ,  $MBL$ , si dovrà altresì intendere de' massimi triangoli iscritti. Ora le basi  $AB$ ,  $DC$  possono segarsi o nell'ellisse ( Fig. 462. ), o al di fuori ( Fig. 463. ), o sopra la curva ( Fig. 464. ).

Se le basi  $AB$ ,  $CD$  si segano al di dentro in  $V$  ( Fig. 462. ), tiro le tangenti  $MR$ ,  $RX$  ai vertici de' diametri, o semidiametri  $MO$ ,  $RO$ , la retta  $RM$ , che congiugne i punti del contatto, e le rette  $AC$ ,  $HL$ ,  $DB$ , che passano per l'estremità e per mezzo le basi  $AB$ ,  $CD$ . Sego in due parti uguali la retta  $RM$ ; e pel punto  $X$ , in cui concorrono le tangenti e 'l mezzo di  $RM$ , tiro la retta  $XF$ , ch'è un diametro ( N. 731. ), e che passa pel centro  $O$ .

Ora, per ipotesi, noi abbiamo  $ML : MO :: RH : RO$ ; dunque i triangoli  $ROM$ ,  $HOL$  son simili, e le basi  $RM$ ,  $HL$  son parallele; e siccome la base  $RM$  del triangolo  $RMO$  è segata per mezzo dalla retta  $XO$ , che passa pel vertice  $O$ , la base  $HL$  del trian-

triangolo  $HOL$  sarà altresì divisa per mezzo in  $S$  dalla stessa retta  $XO$ : dall'altra parte, a cagione delle parallele  $RM$ ,  $HL$  e delle tangenti  $RX$ ,  $XM$  parallele alle doppie ordinate  $DC$ ,  $AB$ , simili sono i triangoli  $RXM$ ,  $HVL$ ; e poichè la retta  $XF$ , la quale sega per mezzo la base  $RM$  del triangolo  $RXM$  e passa pel vertice  $X$ , sega pure per mezzo la base  $HL$  del triangolo  $HVL$  e fa l'angolo  $XSH$  uguale all'angolo  $XVR$ , conviene di necessità, che questa retta  $XF$  passi ancora pel vertice  $V$  del triangolo  $HVL$ : così noi abbiamo  $VL \cdot HV :: XM \cdot RX$ ; onde  $\overline{VL} \cdot \overline{HV} :: \overline{XM} \cdot \overline{RX}$ .

Ora, tagliandosi le basi  $AB$ ,  $CD$  de' segmenti al di dentro dell'ellisse, abbiamo  $AV \times VB \cdot CV \times VD :: \overline{MX} \cdot \overline{RX}$  (*N.734.*); e però  $AV \times VB \cdot CV \times VD :: \overline{VL} \cdot \overline{HV}$ : ma a motivo delle basi  $AB$ ,  $CD$ , divise in due ugualmente in  $L$  ed  $H$ , e disugualmente in  $V$ , abbiamo  $AV \times VB = \overline{AL} - \overline{VL}$ , e  $CV \times VD = \overline{CH} - \overline{HV}$ ; dunque  $\overline{AL} - \overline{VL} \cdot \overline{CH} - \overline{HV} :: \overline{VL} \cdot \overline{HV}$ , ovvero  $\overline{AL} - \overline{VL} \cdot \overline{VL} :: \overline{CH} - \overline{HV} \cdot \overline{HV}$ ; e componendo, avremo  $\overline{AL} - \overline{VL} + \overline{VL} \cdot \overline{VL} :: \overline{CH} - \overline{HV} + \overline{HV} \cdot \overline{HV}$ , cioè  $\overline{AL} \cdot \overline{VL} :: \overline{CH} \cdot \overline{HV}$ , e però  $\overline{AL} \cdot \overline{VL} :: \overline{CH} \cdot \overline{HV}$ ; donde avviene, che le rette  $HL$ ,  $AC$  son parallele. Ora  $\overline{AL} = \overline{LB}$ , e  $\overline{CH} = \overline{DH}$ ; dunque  $\overline{LB} \cdot \overline{VL} :: \overline{DH} \cdot \overline{HV}$ : così le rette  $DB$ ,  $HL$  son parallele, ed in conseguenza le quattro  $AC$ ,  $RM$ ,  $HL$ ,  $DB$  sono parallele e divise ciascuna per mezzo dalla retta  $XF$ ; dal che ne segue, che i trapezoidi  $RMBD$ ,  $RMLH$  ed  $HLBD$  son parimente divisi ciascuno per mezzo dalla stessa linea  $XF$ . Dal trapezoide  $RMBD$  levando dunque da una parte i trapezoidi  $RVSH$  ed  $HSFD$ , e dall'altra i trapezoidi  $VMLS = RVSH$  ed  $LSFB = HSFD$ , resterà dall'una il triangolo  $RHD$  uguale al triangolo  $MLB$  dell'altra.

Se le basi  $AB$ ,  $CD$  (*Fig. 463.*) si tagliano in  $T$  fuori dell'ellisse, faccio la stessa costruzione di prima, e mostrerò nel medesimo modo; che le rette  $RM$ ,  $HL$  sono fra lor parallele, e divise per mezzo dal diametro  $XO$ ; che questo diametro passa pel punto  $T$ , e che s'avrà  $\overline{TL} \cdot \overline{TH} :: \overline{MX} \cdot \overline{RX}$ ; perocchè i triangoli simili  $LTH$ ,

LTH, MXR ci danno  $TL \cdot TH : : MX \cdot RX$ : ora le secanti TB, TD ci danno  $TB \times TA \cdot TD \times TC : : \overline{MX} \cdot \overline{RX}$ ; dunque  $TB \times TA \cdot TB \times TC : : \overline{TL} \cdot \overline{HT}$ . Ma  $TB \times TA = \overline{TL} - \overline{AL}$ , e  $TD \times TC = \overline{TH} - \overline{CH}$ ; onde  $\overline{TL} - \overline{AL} \cdot \overline{TH} - \overline{CH} : : \overline{TL} \cdot \overline{HT}$ , ovvero  $\overline{TL} \cdot \overline{TL} - \overline{AL} : : \overline{TH} \cdot \overline{TH} - \overline{CH}$ , e dividendo,  $\overline{TL} \cdot \overline{TL} - \overline{TL} + \overline{AL} : : \overline{TH} \cdot \overline{TH} - \overline{TH} + \overline{CH}$ , cioè  $\overline{TL} \cdot \overline{AL} : : \overline{TH} \cdot \overline{CH}$ ; e perciò  $TL \cdot AL : : TH \cdot CH$ , il che rende le linee HL, CA parallele; e poichè, a motivo di  $AL = LB$  e di  $CH = HD$ , abbiamo  $TL \cdot LB : : TH \cdot HD$ , le linee DB, HL sono altresì parallele: così le quattro CA, RM, HL, DB son parallele e divise ciascuna per mezzo dal diametro XF, e in conseguenza li trapezoidi RMDB, RMLH ed HLBD son parimente divisi ciascuno in due parti uguali da questo stesso diametro. Terminando adunque il rimanente come sopra, troveremo ancora  $RDH = MBL$ .

Finalmente, se le basi AB, CD (Fig. 464.) si tagliano sopra la curva, faccio la medesima costruzione, e le rette RM, HL son parallele e divise ciascuna per mezzo dalla retta XF: ora  $AL = LB$ , ed  $AH = HD$ ; onde  $AL \cdot AB : : AH \cdot AD$ , e in conseguenza le rette DB, HL son parallele e divise ciascuna per mezzo dal diametro XF: così li trapezoidi RMDB, RMLH ed HLBD sono altresì divisi ciascuno in due parti uguali dallo stesso diametro; e però terminando il rimanente come sopra, s'avrà  $RDH = MBL$ .

738. DIFFINIZIONE. Se dato un diametro RS (Fig. 465.) colla sua tangente RT, pel centro O tirisi un diametro MN parallelo alla tangente, esso chiamasi *diametro conjugato del diametro RS*.

739. PROPOSIZIONE CXLVI. Il quadra di qualsivoglia ordinata HE (Fig. 465.) a un diametro RS è al rettangolo RH  $\times$  HS delle parti di esso diametro, ch'ella taglia, come il quadra del diametro MN conjugato del diametro RS è al quadra del diametro RS.

Le rette HE, MO essend' ordinate al diametro RS, abbiamo  $\overline{EH} \cdot RH \times HS : : \overline{MO} \cdot RO \times OS$  (N.730.) : ma  $RO = OS$ ,  
onde



onde  $\vec{EH} \cdot RH \times HS :: \vec{MO} \cdot \vec{RO} :: \text{ora } \vec{MO} \cdot \vec{RO} :: \vec{MN} \cdot \vec{RS}$ ; dunque  $\vec{EH} \cdot RH \times HS :: \vec{MN} \cdot \vec{RS}$ .

740. PROPOSIZIONE CXLVII. *Qualsivoglia linea EF, la quale d' ambe le parti termina alla curva ( Fig. 465. ), ed è parallela a un diametro RS, viene segata per mezzo dal diametro MN conjugato del diametro RS.*

Da termini E, F della retta EF tiro al diametro RS l' ordinate EH, FL, le quali sono fra lor parallele ed uguali, a motivo delle parallele EF, RS. Ora noi abbiamo  $\vec{HE} \cdot RH \times HS :: \vec{LF} \cdot RL \times LS$  ( N. 730. ), ed  $\vec{HE} = \vec{LF}$ , a cagione di  $HE = LF$ ; dunque  $RH \times HS = RL \times LS$ : ma  $RH \times HS = \vec{RO} - \vec{HO}$ , ed  $RL \times LS = \vec{SO} - \vec{LO}$ ; ovvero  $\vec{RO} - \vec{LO}$ ; onde  $\vec{RO} - \vec{HO} = \vec{RO} - \vec{LO}$ , e per conseguenza  $\vec{HO} = \vec{LO}$ , ed  $HO = LO$ : ma a motivo delle parallele HE, MO, LF, ed EF, RS, abbiamo  $HO = EV$ , ed  $LO = VF$ ; però  $EV = VF$ .

741. COROLLARIO. Quindi tutte le parallele al diametro RS sono doppie ordinate al suo diametro conjugato MN; e per conseguenza la tangente TQ tirata dal vertice M è parallela ad RS; dal che ne risulta, che RS è il diametro conjugato del suo conjugato MN, e che l'quadro di qualsivoglia ordinata EV al diametro MN è al rettangolo MV  $\times$  VN delle parti di detto diametro, ch' essa taglia, come l' quadro di RS è al quadro di MN.

742. PROPOSIZIONE CLXVIII. *Dati due assi AB, CD ( Fig. 466. ) e due diametri conjugati MN, RS, il rettangolo PQTV dei due assi, cioè l' rettangolo formato dalle quattro tangenti de' due assi equivale al parallelogrammo dei due diametri, cioè al parallelogrammo XZHL fatto dalle tangenti de' diametri.*

Il segmento ADB segato dall' asse maggiore AB, e l' segmento MSN tagliato dal diametro MN hanno le parti OD, OS de' loro diametri comprese fra la curva e le lor basi AB, MN proporzionali a questi stessi diametri; poichè OD . OG :: OS . OR; dunque i massimi triangoli ADB, MSN iscritti in questi segmenti son' uguali ( N. 737. ): ora il triangolo ADB è la metà del rettangolo AQTb d' ugal base ed altezza, e l' triangolo MSN è la metà del parallelogrammo MHLN; onde AQTb equivale ad MHLN,

e ccc.

e conseguentemente il rettangolo PQTV doppio di AQTB è uguale al parallelogrammo XZLH doppio di MHLN.

743. COROLLARIO I°. *Poste le stesse cose, se dall'estremità D dell'asse minore (Fig. 467.) tirasi un'ordinata DV al diametro MN, e che dall'estremità S dell'altro diametro conjugato RS tirisi un'ordinata SL al grand'asse AB, dico; che'l diametro MN e'l grand'asse saranno tagliati nella stessa ragione in V ed L dalle loro ordinate DV, SL.*

Prolungo l'ordinate DV ed LS; la prima, finchè in Y seghi la tangente SY del diametro RS conjugato di MN, e la seconda, finchè seghi in X la tangente DT del picciolo asse; e quindi tiro DS. Il triangolo ODS è la metà del parallelogrammo OVYS d'ugual base ed altezza, ed è pure la metà del rettangolo ODXL; onde'l parallelogrammo OVYS equivale al rettangolo ODXL: ora il parallelogrammo OMHS, essendo'l quarto del parallelogrammo de'diametri conjugati MN, RS, è uguale al rettangolo ODTB, ch'è'l quarto del rettangolo de'due assi (N. 742.) ; però i parallelogrammi OMHS, OVYS sono fra loro nella stessa ragione de'rettangoli ODTB, ODXL, che lor sono uguali ciascuno a ciascuno: ma i parallelogrammi OMHS, OVYS, avendo l'altezza comune OS, sono fra se come le lor basi OM, OV; e i rettangoli ODTB, ODXL, avendo l'altezza comune OD, sono fra se come le lor basi OB, OL; dunque  $OM \cdot OV :: OB \cdot OL$ , e perciò  $OM \cdot OM - OV :: OB \cdot OB - OL$ , ovvero  $OM, MV :: OB, BL$ ; e facendo'l doppio degli antecedenti, avremo  $MN \cdot MV :: AB \cdot BL$ ; e in fine dividendo, s'avrà  $MN - MV :: AB - BL$ , o pure  $NV \cdot MV :: AL \cdot BL$ .

744. COROLLARIO II. *Poste ancora le stesse cose, se dall'estremità M del diametro MN (Fig. 468.) tirasi l'ordinata MH al picciolo asse, e dall'estremità S dell'altro diametro conjugato l'ordinata SL al grand'asse, i due assi saran tagliati proporzionalmente ne'punti H, L.*

Prolungo il diametro MN, finchè seghi in T la tangente DT dell'asse minore, e da D tiro l'ordinata DV a esso diametro. I triangoli simili ODT, OHM ci danno  $OD \cdot OH :: OT \cdot OM$ : ora, a motivo della tangente DT, e dell'ordinata DV condotta dal punto del contatto, si ha  $OV \cdot OM :: OM \cdot OT$ , ovvero  $OT \cdot OM :: OM \cdot OV$ ; dunque  $OD \cdot OH :: OM \cdot OV$ : ma  $OM \cdot OV :: OB \cdot OL$  (N. 743.); onde  $OD \cdot OH$   $OB \cdot OL$ .

745. COROLLARIO III. *Poste ancora le stesse cose, il quadro dell'ordinata MH (Fig. 468.) all'asse minore tirata dal vertice del diametro MN è uguale al rettangolo BL × LA delle parti del grand'asse tagliate dall'ordinata SL condotta dal vertice del diametro conjugato RS; e reciprocamente il quadro dell'ordinata LS è uguale al rettangolo CH × HD delle parti dell'asse minore tagliate dall'ordinata MH.*

Essendo li due assi segati proporzionalmente in H ed L (N. 744), si ha DH. DC :: BL. BA, e CH. DC :: AL. AB; moltiplicando adunque insieme i termini di queste due proporzioni, avremo DH × CH.  $\overrightarrow{DC} :: BL \times AL. \overrightarrow{AB}$ , ovvero DH × CH. BL × AL ::  $\overrightarrow{DC} . \overrightarrow{AB}$ ; ora, per la natura dell'elisse, noi abbiamo  $\overrightarrow{LS} . BL \times AL :: \overrightarrow{DC} . \overrightarrow{AB}$ ; onde  $\overrightarrow{LS} . BL \times AL :: DH \times CH. BL \times AL$ ; e però, a motivo de'consequenti uguali, avremo  $\overrightarrow{LS} = DH \times CH$ .

Così pure noi abbiamo  $\overrightarrow{MH} . DH \times CH :: \overrightarrow{AB} . \overrightarrow{CD}$ , ovvero DH × CH.  $\overrightarrow{MH} :: \overrightarrow{CD} . \overrightarrow{AB}$ ; ma egli s'è trovato DH × CH. BL × AL ::  $\overrightarrow{DC} . \overrightarrow{AB}$ ; dunque DH × CH.  $\overrightarrow{MH} :: DH \times CH. BL \times AL$ , e per conseguente  $\overrightarrow{MH} = BL \times AL$ .

746. COROLLARIO IV. *Poste ancora le stesse cose (Fig. 468.), i quadri de' diametri conjugati MN, RS sono insieme uguali ai quadri de' due assi pres'insieme.*

Il triangolo rettangolo OMH ci dà  $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{MH}$ ; ma (N. 745.)  $\overrightarrow{MH} = BL \times AL$ ; dunque  $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OH} + BL \times AL$ . Similmente, nel triangolo rettangolo OSL, abbiamo  $\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OL} + \overrightarrow{LS}$ ; ma  $\overrightarrow{LS} = CH \times HD$ ; onde  $\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OL} + CH \times HD$ ; e perciò  $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OH} + BL \times AL + \overrightarrow{OL} + CH \times HD$ ; ora, essendo l'asse AB diviso in due ugualmente in O e disugualmente in L, abbiamo  $BL \times AL + \overrightarrow{OL} = \overrightarrow{BO}$ , e per la stessa ragione  $CH \times HD + \overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OD}$ ; dunque  $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OS} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OD}$ . Dunque, ec.

747. CO.

## DELLE MATEMATICHE. 187

747. COROLLARIO V. Se dall' estremità M, R de' diametri conjugati MN, RS (Fig. 469.) tiransi dell' ordinate al grand' asse, il rettangolo AF  $\times$  FB delle parti tronche dall' una dell' ordinate equivale al quadro della distanza LO dall' altra ordinata al centro O.

Dal punto M tiro all' asse minore l' ordinata MV, e per conseguenza il quadro di detta ordinata equivale al rettangolo AF  $\times$  FB: ma  $MV = LO$ ; dunque  $\overline{LO} = AF \times FB$ : si proverà nello stesso modo, che  $\overline{FO} = AL \times LB$ .

748. PROPOSIZIONE CL. Nell' Elisse vi sono sempre due diametri conjugati uguali, e tutti gli altri son disuguali.

Sia l' elisse ADCB (Fig. 470.), di cui AB è l' asse maggiore e CD il minore: colle rette AD, DB, BC, AC io unisco l' estremità di quest' assi; il che mi dà un parallelogrammo ABCD, i cui quattro lati son' uguali. Dal centro O tiro la retta NM parallela al lato CA; il che divide'l parallelogrammo ABCD in due parallelogrammi uguali AHCL, HDBL, perocchè uguali sono i triangoli simili AOH, BOL a motivo del lato AO uguale al lato OB: per la stessa ragione i triangoli simili AOC, DOB son uguali, e i triangoli simili COL HOD lo son pure, a motivo del lato CO uguale al lato OD; così i parallelogrammi AHCL, HDBL, essendo composti d' uno stesso numero di triangoli uguali ciascuno a ciascuno, sono fra se uguali: ora essendo detti parallelogrammi fra le parallele AD, CB, hanno la medesima altezza; onde la base CL dee equivalere alla base LB, e perciò  $AH = HD$ ; dunque MN divide per mezzo le due rette CB, AD, che sono fra lor parallele, e che d' ambe le parti terminano alla curva; ed in conseguenza MN è un diametro.

Si proverà nella stessa maniera, che se dal centro O tirasi una linea RS parallela al lato AD del parallelogrammo ABCD, ella sarà pure un diametro, il quale, per essere parallelo all' ordinate AH, CL del diametro MN, sarà conjugato dello stesso.

Ora, uguali essendo le linee AD, AC, egl' io sono ancora le loro metà AH, AP, e per conseguente il parallelogrammo AHOP è composto di quattro lati uguali; donde avviene, che perfettamente uguali sono i triangoli AHO, APO, aventi'l lato AO comune, ed i lati AH, OH uguali fra loro ed a lati AP, PH, e che l' angolo AOH equivale all' angolo AOP; concependo però, che la se-

A a 2

mi-

mielisse ADB sia sovrapposta alla sua uguale ACB, talmente che l'angolo retto AOD cada sull'angolo retto AOC, la curva ADB caderà sopra la curva ACB, l'angolo AOM sopra'l suo uguale AOR, e'l lato OM sarà uguale al lato OR: ora MN e'l doppio di ON (N. 696.), ed OR il doppio di RS; onde i diametri conjugati MN, RS son' uguali.

Ora si concepiscano due altri diametri conjugati ad arbitrio diversi da' due conjugati ed uguali MN, RS, che si son ritrovati (Fig. 471.); l'uno di essi taglierà i quarti d'elisse AG o iafra R ed A, o infra R e C. Supponiamo, ch'e'li seghi fra R ed A in T, e che questo diametro sia la retta TV, maggiore in conseguenza di RS (N. 705.); da' punti R, T io tiro le tangenti RX, TZ, le quali si segheranno in qualche punto Y fra i punti del contato R, T (N. 710.); quindi è, che s'io prolunga la tangente YTZ e'l diametro NM parallelo alla tangente RX, la tangente YZL segherà in L il diametro NM, e l'angolo QZL esteriore al triangolo ZOL farà maggior dell'angolo interno AOL: ora essendo il diametro HP, il quale è conjugato del diametro TV, parallelo alla tangente TZ, gli angoli dalla stessa banda QZL, QOH son'uguali; onde l'angolo QOH, od AOH è maggiore dell'angolo QOL, o ZOL, od AOM; e per conseguente MO è maggiore di HO (N. 705.), ed MN di HP: ma TV è maggiore di RS, o del suo uguale MN; dunque molto più TV è maggiore del suo conjugato HP.

Si proverà nello stesso modo, che se l'uno de' diametri conjugati passa fra R e G, nel qual caso egli farà minore di RS, il suo conjugato farà maggiore di MN uguale ad RS.

749. COROLLARIO. *Dati in un'Elisse i due diametri conjugati ed uguali MN, RS (Fig. 472.), il quadro di qualsivoglia ordinata PH all'uno di essi MN equivale al rettangolo MH × HN delle parti di detto diametro segate dall'ordinata.*

Imperocchè noi abbiamo  $\overline{PH} \cdot MH \times HN : : \overline{RS} \cdot \overline{MN}$ : ma a cagione di  $\overline{RS} = \overline{MN}$  noi abbiain pure  $\overline{RS} = \overline{MN}$ ; dunque  $\overline{PH} = MH \times HN$ .

750. AVVERTIMENTO. La proprietà dell'elisse rispetto ai diametri conjugati è dunque simile a quella del circolo; e in questo solo differisce, che nel circolo, l'ordinata è sempre perpendicolare al suo diametro, là dove nell'elisse, l'angolo PHM (Fig. 472.)

for-

## DELLE MATEMATICHE. 189

formato dall'ordinata coll'uno de' due diametri conjugati ed uguale li è sempre acuto, perocchè egli è uguale all'angolo ROM formato dai due diametri: ora ROM (Fig. 470.) è uguale all'angolo CBD del parallelogrammo ABDC, e CBD è acuto, come si dimostrerà; onde l'angolo PHM (Fig. 472.) è altresì acuto.

Quindi a fine di provare, che l'angolo CBD (Fig. 470.) è acuto, basta solo avvertire, che i due triangoli isosceli CBD, ACB hanno i lati CB, BD uguali ciascuno a ciascuno a' lati AC, CB: ma la base CD del primo è minor della base AB del secondo; dunque l'angolo CBD è minore dell'angolo ACB: ora nel parallelogrammo ACBD, i due angoli CBD, ACB vagliono insieme due retti; però CBD vale meno, ed ACB più d'un retto.

751. PROPOSIZIONE CL1. *Se dato l'asse ed uno, o due diametri MN, HL (Fig. 473.), i quali non sieno fra loro conjugati, dall'estremità di essi tiransi quattro tangenti TR, PE, e TP, RE, le quali si seggino in T, R, E, P, cadauna delle due TR, FE tirate dall'estremità del diametro MN sarà divisa in M ed N in due parti uguali ciascuna a ciascuna, cioè  $TM = NE$ , ed  $MR = NP$ ; e similmente, cadauna delle due TP, RE sarà divisa in due parti uguali ciascuna a ciascuna.*

Tiro le rette HM, NL, che congiungono l'estremità de' due diametri, e a motivo di MO. MN :: HO. HL, le rette HM, NL sono fra lor parallele. Dal punto T, in cui le tangenti HT, MT si segano, pel mezzo S della retta HM tiro la linea TE, ch'è un diametro (N. 731.), e che conseguentemente sega pure in due parti uguali la retta NL parallela ad HM; dal che ne segue, esser questo diametro simile a quello, che tirerebbesi dal punto E, in cui le due tangenti NE, EL si segano pel mezzo Z della retta NL, che congiugne i punti del contatto N, L. Ora le tangenti TR, PE essendo fra se parallele, poichè esser debbono parallele all'ordinate del diametro MN, è evidente, che i triangoli TMO, NOE son simili, ed in oltre uguali, a cagione del lato MO uguale al lato NO; onde  $TM = NE$ ; ma  $TR = PE$ , a motivo del parallelogrammo TREP; dunque  $TR = TM$ , od  $MR = PN$ .

Parimente i triangoli simili HTO, EOL, avendo'l lato HO uguale al lato OL, son perfettamente uguali, ed in conseguenza  $HT = EL$ ; ma  $PT = ER$ ; onde  $PH = LR$ .

752. COROLLARIO. *Poste le stesse cose, dico; che'l rettangolo*  
TM

$TM \times MR$  (Fig. 474.) delle due parti della tangente  $TR$  al vertice  $M$  del diametro  $MN$  equivale al quadrato del semidiametro  $OZ$  conjugato di  $MN$ , e che il rettangolo  $TH \times HP$  delle parti della tangente  $TP$  al vertice  $H$  del diametro  $HL$  equivale al quadrato del semidiametro  $OE$  conjugato di  $HL$ .

Prolungo la tangente  $PT$  fino al concorso del diametro  $MN$  prolungato in  $B$ , e dal punto del contatto tirando l'ordinata  $HC$  al diametro  $MN$ , si ha  $OC . OM :: OM . OB$  (N. 732.), ovvero  $OB . OM :: OM . OC$ ; dunque  $OB - OM . OB :: OM - OC . OM$ , cioè  $BM . OB :: MC . MO$ , ovvero  $BM . MC :: BO . MO$ ; e quindi  $BM . BM + MC :: BO . BO + MO$ , cioè  $BM . BC :: BO . BO + MO$ ; ma a motivo di  $MO = ON$ ; noi abbiamo  $BO + MO = BO + ON = BN$ ; onde  $BM . BC :: BO . BN$ : ora, simili essendo i triangoli  $BMT$ ,  $BCH$ ,  $BOX$ ,  $BNP$ , le lor basi  $TM$ ,  $HC$ ,  $XO$ ,  $PN$  son nella stessa ragione de' lati  $BM$ ,  $BC$ ,  $BO$ ,  $BN$ ; però  $TM . HC :: XO . PN$ , e quindi  $TM \times PN = HC \times XO$ : ma dal punto del contatto  $H$  tirando al semidiametro conjugato  $OZ$  l'ordinata  $HQ$ , che sarà parallela ad  $MN$ , avremo  $OQ . OZ :: OZ . OX$ , e a motivo delle parallele  $HQ$ ,  $CO$ , uguali sono le parallele  $HC$ ,  $QO$ ; dunque  $HC . OZ :: OZ . OX$ ; dal che io deduco  $HC \times OX = \overline{OZ}$ , e per conseguenza  $TM \times PN = \overline{OZ}$ : ma  $PN = MR$  (N. 751.); però  $TM \times MR = \overline{OZ}$ ; e nella stessa maniera si proverà, che  $TH \times HP = \overline{OE}$ .

753. AVVERTIMENTO. Dal predetto Corollario e' si deduce la Regola, o'l Teorema seguente: se la retta  $OB$  è divisa in  $C$  ed  $M$ , tal che s'abbia  $OC . OM :: OM . OB$ , e che dal lato di  $O$  le s'aggiunga una retta  $ON$  uguale alla media proporzionale  $OM$ , s'avrà  $BM . BC :: BO . BN$ .

Ora dal detto Teorema io ne inferisco un'altro del pari importante; cioè, che se una linea  $OB$  è divisa in  $C$  ed  $M$ , talmente che s'abbia  $OC . OM :: OM . OB$ , e che dal lato di  $O$  le s'aggiunga una retta  $ON$  uguale alla media proporzionale  $OM$ , l'intera linea  $OB$  sarà divisa armonicamente ne' punti  $M$ ,  $C$ , e s'avrà  $BM . MC :: BN . CN$ ; il che io provo in questo modo.

Per ipotesi noi abbiamo  $OC . OM :: OM . OB$ , ovvero  $OB . OM :: OM . OC$ ; dunque  $BO - OM . OM :: OM - OC . OC$ , cioè  $BM . OM :: MC . OC$ , o sia  $BM . MC :: OM . OC$ , così pure,  
a mo-

## DELLE MATEMATICHE. 191

a motivo di  $BO \cdot OM :: OM \cdot OC$ , noi abbiamo  $BO + OM \cdot OM :: OM + OC \cdot OC$ : ma  $OM = ON$ ; onde  $BN \cdot OM :: CN \cdot OC$ , ovvero  $BN \cdot CN :: OM \cdot OC$ : ma egli s'è già trovato  $BM \cdot MC :: OM \cdot OC$ ; però  $BM \cdot MC :: BN \cdot CN$ .

E quindi ella è facil cosa provare l'opposto di questo secondo Teorema; cioè, che se una linea  $BN$  è divis' armonicamente ne' punti  $M, C$ , e che dividasi per mezzo in  $O$  la somma  $MN$  di due delle sue parti conseguenti  $NC, CM$ , s'avrà sempre  $OC \cdot OM :: OM \cdot OB$ , e  $BM \cdot BC :: BO \cdot BN$ .

Poichè, siccome  $BM \cdot MC :: BN \cdot CN$ ; così  $BN \cdot BM :: CN \cdot MC$ , e però  $BN + BM \cdot BM :: CN + MC \cdot MC$ : ma  $BN = NM + MB$ , e  $CN + MC = MN$ ; onde  $NM + 2BM \cdot BM :: MN \cdot MC$ , e prendendo la metà degli antecedenti, avremo  $OM + MB \cdot BM :: OM \cdot MC$ , ovvero  $OB \cdot BM :: OM \cdot MC$ ; dunque  $OB - BM \cdot OB :: OM - MC \cdot OM$ , cioè  $OM \cdot OB :: OC \cdot OM$ , ovvero  $OC \cdot OM :: OM \cdot OB$ : quindi, a motivo di  $ON$  uguale alla media proporzionale; noi avremo come sopra  $BM \cdot BC :: BO \cdot BN$ .

754. PROBLEMA. *Data un' Elisse ACBD ( Fig. 475. ) trovare il suo centro, i suoi due assi, ed i suoi fuochi.*

Tiro delle linee  $HL, PQ$ , ec. fra lor parallele, e che d' ambe le parti terminino alla curva; le divido ciascuna per mezzo ne' punti  $R, S$ , ec. e facendo per i punti  $R, S$ , ec. passar' una retta  $MN$ , ella farà un diametro, ed in conseguenza il punto  $O$ , il quale sega per mezzo questa linea, è'l centro; e se le rette  $HL, PQ$ , ec. son perpendicolari ad  $MN$ , la retta  $MN$  farà l'uno, o l'altro dei due assi.

Altrimenti, dal centro  $O$  io descrivo un circolo, il quale seghi la curva in qualche punto  $T$ ; e così'l raggio  $OT$  di questo circolo è minor del semiasse maggiore, perocchè il circolo, che ha per raggio il grand'asse, è circoscritto all'elisse, senza segarla; e questo stesso raggio  $OT$  è maggior del semiasse minore, a cagione che'l circolo, il quale ha per raggio il semiasse minore, è iscritto, senza pure segar la curva; dunque'l circolo del raggio  $OT$  dee segar l'elisse in quattro punti  $T, X, Z, Y$  (N. 707.). Conduco da questi quattro punti le rette  $TX, XZ, ZY, YT$ , e segandole ciascuna per mezzo, da' punti di divisione io tiro le rette  $AB, DC$ , che terminano alla curva; quindi elle son i due assi (N. 707.), e per conseguente la massima  $AB$  è l'asse maggiore, o l'altra il minore.

Figlio



Piglio col compasso la grandezza AO del semiasse maggiore, e dall'estremità D dell'asse minore io descrivo un'arco, che seghi l'asse maggior ne' punti F, V, che sono i fuochi ( N. 729. ).

755. PROBLEMA. *Misurare un'Elisse* ( Fig. 476. ).

Descrivo l'circolo circonscritto, e misurandolo, similmente che l'asse e' l'picciolo asse, dico per la Regola del Tre: l'asse maggior'è al minore, come l'circolo circonscritto è ad un quarto termine, che farà l'valore dell'elisse; poichè, essendo la somma dell'ordinate del semicircolo AEB a quella delle corrispondenti al grand'asse della semielisse ADB, come l'grand'asse è al picciolo (N. 703.), egli è per se manifesto, che l'intero circolo è all'intera elisse; come l'asse maggior' al minore.

Ovvero, descrivo l'circolo iscritto, e misurandolo dico per la Regola del Tre: l'asse minor'è al maggiore, come l'circolo iscritto è ad un quarto termine, che farà l'elisse; poichè, essendo la somma dell'ordinate del semicircolo CRD, o pure il semicircolo CRD alla somma dell'ordinate al picciolo asse CD della semielisse CAD, ovvero alla semielisse CAD, come l'asse minor'è al maggiore ( N. 703. ), ne segue, che l'intero circolo iscritto CRDT è all'intera elisse, come l'asse minor'è al maggiore.

O finalmente, piglio in numeri i valori del circolo circonscritto e dell'iscritto, e l'numero medio proporzionale Geometrico fra questi due numeri si è l'valore dell'elisse ( N. 703. ), cioè moltiplicando insieme i valori de' due circoli, ed estraendo la radice quadra dal prodotto, ella farà l'elisse.

756. PROBLEMA. *Misurare un segmento d'Elisse rAR tagliato da una doppia ordinata rR al grand'asse* ( Fig. 477. ).

Descrivo l'circolo circonscritto ANBn, e d'ambe le parti io prolungo rR, finchè seghi la circonferenza del circolo in n, N; ciò che mi dà il segmento del circolo nAN, ch'io misuro, e poscia dico per la Regola del Tre: il grand'asse è al picciolo, come l'segmento del circolo nAN è ad un quarto termine, che farà il segmento rAR; imperocchè qualsivoglia ordinata HT del semisegmento circolare ANM è a qualsivoglia ordinata HS del semisegmento ellittico ARM, come OE, OC, ovvero come l'grand'asse al picciolo ( N. 689. ); dunque la somma dell'ordinate al semisegmento circolare, o l' semisegmento AMN è alla somma dell'ordinate al semisegmento ARM, o al semisegmento ARM, come l'asse maggior' al minore, e però l'intero segmento nAN è nella medesima ragione all'intero segmento rAR.

757. PRO.

## DELLE MATEMATICHE. 193

**757. PROBLEMA.** *Misurare un settore Ellittico  $rARO$  (Fig. 477.), la cui corda  $rR$  sia doppia ordinata al grand' asse.*

Prolungo la corda  $rR$ , finchè seghi d'ambe le parti la circonferenza del circolo circoscritto in  $n$ ,  $N$ , e da' detti punti io tiro al centro  $O$  delle rette  $nO$ ,  $NO$ , il che mi dà un settore di circolo  $nANO$ , ch'io misuro; poi dico per la Regola del Tre: l'asse maggior' è al minore come l' settore circolare  $nANO$  è ad un quarto termine, che farà l' settore ellittico  $rARO$ . Imperocchè il semisegmento circolare  $ANM$  è al semisegmento ellittico  $ARM$  come l' grand' asse è al picciolo ( *N. 756.* ); e poichè i triangoli  $MNO$ ,  $MRO$  han l'altezza comune, essi sono fra loro come le lor basi  $MN$ ,  $MR$ , o come  $OE$  ad  $OC$ , o finalmente come l' asse maggior' è al minore; dunque l' semisegmento  $ANM$  più l' triangolo  $MNO$ , cioè l' semisettore circolare  $ANO$  è al semisegmento  $ARM$  più l' triangolo  $MRO$ , cioè al semisettore  $ARO$ , come l' grand' asse al picciolo; e per conseguenza l' intero settore  $nANO$  è all' intero settore  $rARO$ , come l' asse maggior' al minore.

**758. AVVERTIMENTO.** Se l' segmento ellittico  $rCR$  (Fig. 478.) fosse formato da una doppia ordinata  $rR$  al picciolo asse, descriverci l' circolo iscritto  $CnDN$ , e direi per la Regola del Tre: l' asse minor' è al maggiore, come l' segmento circolare  $NcN$  è ad un quarto termine, che farebbe l' segmento ellittico  $rCR$ .

Così ancora, a fine d'aver' il settore  $rCRO$ , per la Regola del Tre io direi: l' asse minor' è al maggiore, come l' settore circolare  $nCNO$  è ad un quarto termine, che farebbe l' settore  $rCRO$ . Il ch'è facile a dimostrarsi; perchè tutte l' ordinate al semisegmento circolare  $CnM$  sono all' ordinate del semisegmento ellittico  $CrM$ , come l' asse minor' è al maggiore ( *N. 702.* ), e perchè il triangolo  $MnO$  è al triangolo  $MrO$ , come  $Mn$  ad  $Mr$ , o come il picciolo asse al grande.

**759. PROBLEMA.** *Misurare un segmento Ellittico  $HRL$  segato da una base  $HL$  obliqua all' asse maggiore, ed al minore ( Fig. 479. ).*

Seo il grand' asse  $AB$  in  $Z$  nella stessa ragione che l' diametro  $RS$  della base del dato segmento è diviso in  $T$ , cioè faccio  $RS : RT :: BA : BZ$ ; e da  $Z$  tirando una doppia ordinata  $Mn$ , il segmento  $MBn$  sarà uguale al dato  $HRL$ ; però egli basterà misurare il segmento  $MBn$  come sopra ( *N. 756.* ), e l' suo valore sarà simile a quello del segmento  $HRL$ ; ciò ch'io dimostro in questo modo.

Tomo II.

B b

Con-

Concepisco, che l'altezza  $BZ$  del segmento  $MB$  sia divisa in infinite parti uguali, che da' punti di divisione sien tirate delle doppie ordinate, e che dall'estremità di ciascuna d'esse sieno alzate delle picciole perpendicolari; il che mi darà de' piccioli rettangoli circonscritti, i quali tutti avranno un'altezza infinitamente picciola ed uguale a  $ZX$ . Concepisco eziandio, che la parte  $RT$  del diametro  $RS$  sia divisa in uno stesso numero di particelle, le quali in conseguenza faranno proporzionali a quelle di  $BZ$ , e che da' punti di divisione sieno condotte delle doppie ordinate ad  $RT$ , alle cui all'estremità sien tirate delle linee parallele ad  $RT$ ; il che mi darà tanti parallelogrammi circonscritti al segmento  $HRL$ , quanti sono i rettangoli circonscritti al segmento  $MB$ : dal vertice  $R$  del diametro  $RS$  sopra la base  $HL$  del segmento  $HRL$  io abbasso la perpendicolare  $RK$ , che dalle doppie ordinate del segmento  $HRL$  sarà divisa in parti uguali e proporzionali alle parti di  $RT$ , ed in conseguenza proporzionali a quelle di  $BZ$ ; così l'altezze de' parallelogrammi circonscritti al segmento  $HRL$  farann' uguali fra se, e all'altezza  $EK$  del primo di essi: ora l'altezze de' parallelogrammi essendo infinitamente picciole, egli è manifesto, che la somma di loro non differirà dal segmento  $HRL$ , siccome la somma de' rettangoli circonscritti al segmento  $MB$  non differirà da questo. Se dunque io provo, che i parallelogrammi circonscritti al segmento  $HRL$  sono insieme uguali a' rettangoli circonscritti al segmento  $MB$ , necessariamente n'avverrà, esser i due segmenti uguali.

Essendo l'asse e'l diametro legati proporzionalmente, avremo  $BZ : BA :: RT : RS$ , e  $ZA : BA :: TS : RS$ ; e moltiplicando insieme i termini di queste due proporzioni, s'avrà  $BZ \times ZA :: \overline{BA}^2 : \overline{RS}^2$ ; e per conseguenza egli s'avrà  $BZ \times ZA : RT \times TS :: \overline{BA}^2 : \overline{RS}^2$ ; e in vece de' due primi termini  $BZ \times ZA$ , e  $RT \times TS$  ponendo i quadri  $\overline{MZ}$ ,  $\overline{VX}$ , i quali sono nella stessa ragione, e in vece de' due ultimi  $RT \times TS$ ,  $RQ \times QS$  ponendo i quadrati  $\overline{HT}$ ,  $\overline{FQ}$ , i quali son pure nella stessa ragione, avremo

mo  $\overline{MZ} \cdot \overline{VX} :: \overline{HT} \cdot \overline{FQ}$ ; dal che si deduce  $\overline{MZ} \cdot \overline{VX} :: \overline{HT} \cdot \overline{FQ}$ , e però  $\overline{Mn} \cdot \overline{Vu} :: \overline{HL} \cdot \overline{Ff}$ , cioè le basi de' rettangoli circoscritti al segmento  $\overline{MBn}$  sono fra loro come le basi de' parallelogrammi circoscritti al segmento  $\overline{HRL}$ .

Ora, il rettangolo fatto sopra la base  $\overline{Mn}$  è  $\overline{Mn} \times \overline{ZX}$ , e'l picciolo parallelogramma formato sopra la base  $\overline{HL}$  è  $\overline{HL} \times \overline{EK}$ ; ma  $\overline{ZX} \cdot \overline{ZB} :: \overline{EK} \cdot \overline{RK}$ ; onde moltiplicando i termini della prima razi  $2 \times \overline{ZX} \cdot \overline{ZB} \times \overline{Mn}$ , e quei della seconda  $\overline{EK} \cdot \overline{RK} \times \overline{HL}$ , avremo  $\overline{Mn} \times \overline{ZX} \cdot \overline{Mn} \times \overline{ZB} :: \overline{HL} \times \overline{EK} \cdot \overline{HL} \times \overline{RK}$ , ovvero  $\overline{Mn} \times \overline{ZX} \cdot \overline{HL} \times \overline{EK} :: \overline{Mn} \times \overline{ZB} \cdot \overline{HL} \times \overline{RK}$ , cioè il rettangolo fatto sopra  $\overline{Mn}$  è al picciolo parallelogramma fatto sopra  $\overline{HL}$ , come 'l rettangolo  $\overline{Mn} \times \overline{ZB}$  è al rettangolo  $\overline{HL} \times \overline{RK}$ . Così pure, il rettangolo fatto sopra  $\overline{Vu}$  è  $\overline{Vu} \times \overline{ZX}$ , e'l picciolo parallelogramma formato sopra  $\overline{Ff}$  è  $\overline{Ff} \times \overline{EK}$ ; ma  $\overline{Vu} \cdot \overline{Ff} :: \overline{Mn} \cdot \overline{HL}$ , e  $\overline{ZX} \cdot \overline{EK} :: \overline{ZB} \cdot \overline{BK}$ ; onde moltiplicando insieme i termini di queste due proporzioni, avremo  $\overline{Vu} \times \overline{ZX} \cdot \overline{Ff} \times \overline{EK} :: \overline{Mn} \times \overline{ZB} \cdot \overline{HL} \times \overline{RK}$ ; così 'l rettangolo e'l picciolo parallelogramma sono ancora fra loro, come 'l rettangolo  $\overline{Mn} \times \overline{ZB}$  al parallelogramma  $\overline{HL} \times \overline{RK}$ ; e siccom' e' si troverà sempre lo stesso, paragonando a cadaun picciolo parallelogramma circoscritto al segmento  $\overline{HRL}$  ciascun rettangolo circoscritto al segmento  $\overline{MBn}$ , così ne segue, che la somma de' rettangoletti circoscritti al segmento  $\overline{MBn}$ , cioè 'l segmento  $\overline{MBn}$  è alla somma de' piccioli parallelogrammi circoscritti al segmento  $\overline{HRL}$ , cioè al segmento  $\overline{HRL}$ , come 'l rettangolo  $\overline{Mn} \times \overline{ZB}$  è al rettangolo  $\overline{HL} \times \overline{RK}$ . Ora  $\overline{MN} \times \overline{ZB}$  è doppio del massimo triangolo  $\overline{MBn}$  iscritto nel segmento  $\overline{MBn}$ , e'l rettangolo  $\overline{HL} \times \overline{RK}$  è doppio del triangolo maggiore  $\overline{HRL}$  iscritto nel segmento; però questi due triangoli iscritti  $\overline{MBn}$ ,  $\overline{HRL}$  sono fra loro come i segmenti: ma i due triangoli  $\overline{MBn}$ ,  $\overline{HRL}$  son'uguali (N. 737.); dunque'egli lo sono altresì i due segmenti  $\overline{MBn}$ ,  $\overline{HRL}$ .

760. PROBLEMA. Misurare un settore Elittico  $\overline{HRLO}$ , la cui corda  $\overline{HL}$  sia obliqua ai due assi (Fig. 479.).

Sejo l'asse maggiore in  $Z$  nella stessa ragione che'l diametro  $\overline{RS}$  della corda  $\overline{HL}$  del settore viene legato in  $T$ ; da  $Z$  tiro la doppia ordinata  $\overline{Mn}$  al grand'asse, e pel centro  $O$  le rette  $\overline{MO}$ ,  $\overline{NO}$ ; ciò che mi dà un settore  $\overline{MONB}$  uguale al settore  $\overline{HRLO}$ : così, misurando  $\overline{MONB}$  come sopra (N. 759.), il suo valor sarà quello del settore  $\overline{HRLO}$ .

Imperocchè tirando la retta OI perpendicolare ad HL, ella farà l'altezza del triangolo HOL, e la retta OZ farà quella del triangolo MON: ora, essendo l'asse e 'l diametro segati per mezzo in O, e proporzionalmente in T e Z, avremo BZ. ZO :: RT. TO, e a motivo de' triangoli simili RTK, TOI abbiamo RT. TO :: RK. OI; dunque BZ. ZO :: RK. OI, ovvero BZ. RK :: ZO. OI: ma i massimi triangoli MB<sub>n</sub>, HRL iscritti ne' segmenti MB<sub>n</sub>, HRL, essendo uguali ( N. 737. ), hanno le basi reciproche alle loro altezze; però M<sub>n</sub>. HL :: RK. ZB, ovvero ZB. RK :: HL. M<sub>n</sub>, e quindi ZO. OI :: HL. M<sub>n</sub>; dal che si deduce ZO x M<sub>n</sub> = HL x OI: ora ZO x M<sub>n</sub> è 'l doppio del triangolo MON, ed HL x OI è 'l doppio del triangolo HLO; onde questi due triangoli sono uguali: ma i due segmenti B<sub>n</sub>, MHRL son pure uguali ( N. 759. ); dunque lo sono anche i due settori MON<sub>B</sub>, HOLR.

**761. PROPOSIZIONE CLI.** *S'io faccio passare un circolo per l'estremità C, D dell' asse minore ( Fig. 480. ) e per l'una dell'estremità A del maggiore, la porzione di circonferenza CHD, che sarà dalla parte dell'altra estremità B del grand' asse, sarà interamente nell'elisse, e l'altra porzione CNAD ne sarà interamente fuori.*

Poichè nel circolo la linea CD è segata per mezzo in O dalla retta OH, che l'è perpendicolare, la stessa OH è parte del diametro del circolo; e per conseguente, essendo CO un'ordinata a esso diametro, noi abbiamo AO. OC :: OC. OH: ma AO è maggiore di CO; onde molto più ella è maggior di OH; e per conseguenza, essendo OH minore di OB = AO, il punto H è nell'elisse.

Tiro dal vertice A la retta AT perpendicolare al grand'asse AB, ed uguale al suo parametro; così AT sarà minore di AB, poichè 'l parametro del grand'asse è terza proporzionale all'asse maggiore, ed al minore ( N. 691. ): dall'estremità T del parametro conduco la retta TB all'altra estremità B dell' grand' asse, e dal punto H la retta indefinita HK, che passa pel punto G, in cui la retta TB sega 'l picciolo asse; e per la costruzione egli è ad evidenza palese, che la parte HG della retta HK è interamente nel triangolo TBA, e che l'altra sua parte GH è interamente fuori dello stesso: ora ciò posto.

Essendo la retta CO ordinata al diametro AH del circolo, abbiamo

mo  $\overline{CO} = AO \times OH$ , ed essendo la medesima  $CO$  ordinata anche all'asse maggiore, abbiamo  $\overline{CO} = AO \times OG$  (*N. 693.*) ; dunque  $AO \times OH = AO \times OG$ , e quindi  $OH = OG$ . Concepisco, che da ciascun punto della parte  $OH$  dell'asse sieno all'elisse condotte dell'ordinate come  $PE$ , e che al circolo ne sien condotte dell'altre come  $PQ$ ; quindi noi avremo, per la proprietà dell'elisse,  $\overline{PE} = AP \times PV$  (*N. 693.*), e per quella del circolo,  $\overline{PQ} = AP \times PH$ ; ora i triangoli simili  $COH$ ,  $ZPH$  ci danno  $GO : OH :: ZP : PH$ , e noi abbiám ritrovato  $GO = OH$ ; onde  $ZP = PH$ : ma  $ZP$  è minor di  $VP$ , poichè, essendo la retta  $GH$  interamente nel triangolo  $OGB$ , non può la retta  $ZP$  segar  $GB$  senza essere prolungata; dunque  $PH$  è altresì minore di  $PV$ , e per conseguenza  $\overline{PQ}$  è minor di  $\overline{PE}$ , o  $PE$ ; donde avviene, che l'ordinata  $PQ$  del circolo è minore dell'ordinata  $PE$  dell'elisse; e siccome lo stesso egli avverrà rispetto a tutte l'ordinate del circolo e dell'elisse, che passeranno per la retta  $HO$ , così ne segue, che l'arco  $CHD$  del circolo è interamente nell'elisse; il che doveasi 1.<sup>o</sup> dimostrare.

Concepisco in oltre, che da ciascun punto della parte  $AO$  dell'asse maggiore sieno all'elisse condotte dell'ordinate come  $MR$ , e che al circolo ne sien condotte dell'altre come  $MN$ ; quindi noi avremo, per la proprietà dell'elisse,  $\overline{MR} = AM \times MS$  (*N. 693.*),

e per quella del circolo,  $\overline{MN} = AM \times MH$ : ora i triangoli simili  $GOH$ ,  $XMH$  ci danno  $GO : OH :: XM : MH$ ; dunque  $XM = MH$ , a motivo di  $GO = OH$ : ma  $XM$  è maggiore di  $SM$ , per essere  $GK$  interamente fuori del triangolo  $TAB$ ; perciò  $MH$  è altresì maggiore di  $SM$ , e per conseguente  $AM \times MH$ ,

ovvero  $\overline{NM}$  è maggiore di  $AM \times MS$ , od  $\overline{MR}$ ; dal che ne risulta, che l'ordinata  $NM$  al circolo è maggiore dell'ordinata  $MR$  all'elisse; e siccome lo stesso egli avverrà di tutte l'ordinate al circolo e all'elisse, che dall'una e dall'altra parte si tireranno da ciascun punto di  $AO$ , ne segue, che l'arco del circolo  $CAD$  è interamente fuori dell'elisse; il che doveasi 2.<sup>o</sup> dimostrare.

762. PROPOSIZIONE CLII. *S'io faccio passare un circolo per l'estremità  $A$ ,  $B$  del grand'asse e per l'una dell'estremità  $D$  del pic-*

picciolo ( Fig. 481. ), la porzione AHB di circonferenza, che sarà dalla parte dell' altra estremità C dell' asse minore, sarà interamente fuori dell' elisse, e l' altra porzione ADB ne sarà interamente dentro.

Poichè nel circolo la retta AB viene segata per mezzo in Q dalla retta HD, che l' è perpendicolare, la stessa HD è 'l diametro del circolo: così, essendo AO ordinata a questo diametro, noi abbiamo DO. OA :: OA. OH: ma DO è minor di OA; dunque molto più di HO; e per conseguente, essendo HO maggiore di CO = DO, il punto H è fuori dell' elisse.

Dal punto D io tiro la retta DT perpendicolare all' asse minore, ed uguale al suo parametro: così DT sarà maggiore del picciolo asse DC, per essere il parametro del picciolo terza proporzionale all' asse maggiore, ed al minore ( N. 681. ); dall' estremità T del parametro io tiro la retta TC all' altra estremità dell' asse minore, e dal punto H la retta indefinita HK, che passa pel punto G, in cui la retta TC sega il grand' asse prolungato se sia d' uopo; e quindi egli è evidente, che la parte GK di HK sarà interamente nel triangolo CTD, e che l' altra sua parte HG sarà interamente fuori dello stesso: ora ciò posto.

La retta AO, essend' ordinata al circolo, ci dà  $\overline{AO} = DO \times OH$ , e la stessa AO, essend' ordinata all' asse minore dell' elisse, ci dà  $\overline{AO} = DO \times OG$  ( N. 701. ); dunque  $DO \times OH = DO \times OG$ , e quindi  $OH = OG$ . Concepisco, che da tutt' i punti di OC sieno all' elisse condotte dell' ordinate come PE, e che al circolo ne sien condotte dell' altre come PQ; quindi noi avremo, per la proprietà dell' elisse,  $\overline{PE} = DP \times PV$ , e per quella del circolo,  $\overline{PQ} = DP \times PH$ : ora i triangoli simili GOH, ZPH ci danno  $GO \cdot OH :: ZP \cdot PH$ ; onde  $ZP = PH$ , a motivo di  $GO = OH$ : ma ZP è maggiore di PV, per essere HG interamente fuori del triangolo TDC, in cui VP è rinchiuso; dunque PH è altresì maggiore di PV, e per conseguenza  $DP \times PH$ , ovvero  $\overline{PQ}$  è maggiore di  $DP \times PV$ , o sia  $\overline{PE}$ ; dal che ne risulta, che l' ordinata PQ del circolo è maggiore dell' ordinata PE dell' elisse; e siccome lo stesso egli avverrà di tutte l' ordinate al circolo e all' elisse condotte dall' una e dall' altra parte da ciascun punto di OC, così ne segue, che l' arco del circolo AHB è interamente fuori dell' elisse: il che doveasi a.°. dimostrare.

Con-

Concepisco parimente, che da tutt'i punti di DO sieno all'elisse condotte dell'ordinate come MR, e che al circolo ne sien condotte dell'altre come MN; quindi noi avremo, per la proprietà dell'elisse,

$\overline{MR} = DM \times MS$ , e per quella del circolo,  $\overline{MN} = DM \times MH$ : ora i triangoli simili GOH, XMH ci danno  $GO : OH :: XM : MH$ ; dunque  $XM = MH$ , a motivo di  $GO = HO$ : ma XM è minore di MS, per essere la retta GXK interamente nel triangolo CTD; quindi MH è altresì minore di MS, e per conseguente  $DM \times MH$ , ovvero  $\overline{MN}$  è minore di  $DM \times MS$ , od  $\overline{MR}$ . Donde avviene, che l'ordinata MN del circolo è minore dell'ordinata MR dell'elisse; e siccome lo stesso egli avverrà di tutte l'ordinate del circolo e dell'elisse condotte da ciascun punto di DO dall'una e dall'altra parte, così ne segue, che l'arco del circolo ADB è interamente nell'elisse; il che doveasi a.º dimostrare.

763. COROLLARIO 1º. Il minore di tutti gli angoli come CAD, CPD, ec. ( Fig. 482. ), che hanno i loro vertici sopra la curva d'un'elisse, e che insistono all'asse minore CD, è quello, che ha il suo vertice all'una, o all'altra estremità A del grand' asse; e l' maggiore di tutti gli angoli come ADB, APB, ec. ( Fig. 483. ), che hanno i loro vertici sulla curva, e ch'insistono all'asse maggiore AB, è quello, che ha'l suo vertice all'una, o all'altra estremità del picciolo asse.

Faccio passare un circolo per l'estremità C, D dell'asse minore ( Fig. 482. ), e pel vertice A del grand' asse; così l'arco CARD è interamente fuori dell'elisse ( N. 761. ); prolungo CP fino alla circonferenza del circolo in R, e da R tiro la linea RD. Ora gli angoli CAD, CRD hanno i loro vertici alla circonferenza del circolo, ed insistono allo stesso arco CHD; dunque questi due angoli son' uguali: ma l'angolo CPD, essendo esterno al triangolo RPD, è maggiore dell'angolo interno PRD; onde l'angolo CAD uguale all'angolo CRD è minor di CPD. Lo stesso si proverà di tutti gli angoli, ch'avranno i loro vertici sopra la semiellisse ABD, quando descriverai un circolo, che passi per i punti C, D, B.

Similmente, faccio passare per l'estremità A, B dell'asse maggiore ( Fig. 483. ) e per l'estremità D del minore un circolo ARDH, il cui arco ARDB è per conseguenza interamente nell'elisse ( N. 762. ); dal punto R, ove la retta BP sega quest' arco, tiro la retta RA, e i due angoli ARB, ADB son' ugua-



uguali, perchè sono alla circonferenza del circolo, ed insistono allo stesso arco  $AHB$ : ma essendo  $ARB$  esterno al triangolo  $RPA$ , egli è maggiore dell'angolo interno  $BPA$ ; onde l'angolo  $ADB$ , uguale all'angolo  $ARB$ , è maggiore di  $BPA$ ; e così degli altri.

**764. COROLLARIO II.** *Il minore di tutti gli angoli acuti, cui i diametri formano colle loro ordinate, è quello formato dall'uno, o dall'altro de' due diametri conjugati uguali.*

Sia l'ellisse  $ADBC$  (Fig. 484.) : dall'estremità degli assi io tiro le rette  $AD$ ,  $BD$ ,  $BC$ ,  $CA$ ; e dal centro  $O$  tirando la retta  $HOS$  parallela ad  $AC$ , detta linea è l'uno de' due diametri conjugati uguali (N. 748.), e l'angolo acuto  $OQD$ , ch'ei forma colla sua ordinata  $AD$ , equivale all'angolo  $CAD$ .

Sia qualsivoglia altro diametro  $MP$  differente del diametro conjugato di  $HS$ : da  $D$  io tiro una doppia ordinata  $DR$  al diametro  $MP$ , la quale andrà a terminare alla curva in un punto  $R$  differente dal vertice  $A$  dell'asse maggiore; imperocchè se andasse a terminare in  $A$ , ella sarebbe ordinata al diametro  $HS$ , e non al diametro  $MP$ : dal punto  $R$  io tiro la retta  $RG$ ; e a cagione di  $RD$  divisa per mezzo in  $T$  dal suo diametro, e di  $DC$  diviso per mezzo in  $O$ , le rette  $RC$ ,  $TO$  son parallele, e l'angolo acuto  $OTD$ , fatto dal diametro  $PM$  colla sua ordinata  $DR$ , equivale all'angolo  $DRC$ . MA l'angolo  $DRC$  è maggior dell'angolo  $DAC$ , ovvero del suo uguale  $DQO$  (N. 763.); onde l'angolo  $OTD$  è parimente maggiore di  $DQO$ .

**765. COROLLARIO III.** *Il maggiore di tutti gli angoli ottusi, cui i diametri formano colle loro ordinate, è quello formato dall'uno, o dall'altro de' due diametri conjugati uguali.*

Ciò ad evidenza risulta dal precedente Corollario; imperocchè tutt'i diametri colle loro ordinate formano due angoli, l'uno acuto e l'altro ottuso, i quali presi insieme equivagliano a due retti: così, formando l'diametro  $HS$ , ch'è l'uno de' due conjugati uguali, colle sue ordinate un'angolo acuto minore di ciascuno degli angoli acuti formati dagli altri diametri colle loro, è manifesto, che l'angolo ottuso  $OQA$ , fatto dallo stesso diametro  $HS$  colle sue ordinate, esser dee maggiore di ciascuno degli angoli ottusi formati dagli altri diametri colle loro; e detto angolo  $OQA$  equivale all'angolo  $ADB$ , che ha'l suo vertice in  $D$ , e ch'insiste al grand'asse, a cagione delle parallele  $SQ$ ,  $DB$ , e  $AD$ ,  $CB$ .

**766. PROBLEMA.** *Data un'Ellisse  $ADBC$  (Fig. 486.) trovar un diametro, il quale colle sue ordinate faccia un'angolo uguale al dato  $abc$*

Se

Se l' dato angolo è retto, ognun vede, che i due assi corrispondono perfettamente alla quistione: ma s' egli è acuto, ed uguale all'angolo, che ha il suo vertice all'estremità A del grand'asse, e ch'insiste all'asse minore, il diametro ricercato sarà l'uno, o l'altro de' due conjugati uguali ( N. 764. ): Parimente, se l' dato angolo fosse ottuso, ed uguale all'angolo, che ha il suo vertice all'estremità C dell'asse minore, e ch'insiste all'asse maggiore, il diametro cercato sarebbe ancora l'uno, o l'altro de' due conjugati uguali ( N. 765. ): così tutta la quistione riducesi in rinvenire un diametro, il quale colle sue ordinate faccia un'angolo acuto maggiore di quello, ch'insiste a CD, e che ha il suo vertice in A, ovvero un'ottuso minore di quello, che ha il vertice in C, e ch'insiste all'asse maggiore; e siccome dato l'angolo acuto, che viene da un diametro formato colle sue ordinate, è altresì noto l'ottuso, formato da esso colle stesse ordinate, così tutta la quistione consiste ancora in ritrovare un diametro, il quale colle sue ordinate faccia un dato angolo ottuso *abc* minore dell'angolo, che ha il suo vertice in C: ora ciò posto.

Faccio in A un'angolo LAB uguale all'acuto *abd*, ch'è il compimento del dato ottuso *abc*; alzo in A la retta AX perpendicolare sopra LA; dal punto X, in cui la retta AX sega l'asse minore GD, col raggio XA io descrivo un circolo HAKB; e dall'uno, o dall'altro de' punti R, S, in cui'l circolo sega la curva, p. e. da S all'estremità dell'asse maggiore io tiro le rette SA, SB: Segociascuna di queste due rette per mezzo in T e Z; e da' punti di divisione e dal centro O dell'elisse tiro le rette VP, QE, le quali saran due diametri conjugati, che colle loro ordinate formeranno un'angolo ottuso uguale al dato; e'l medesimo facendo in R, troverò ancora altri due diametri conjugati, i quali colle loro ordinate formeran pure lo stesso angolo ottuso. Il che io dimostro in questo modo.

1°. Il circolo passerà per l'altro termine B dell'asse maggiore; poichè i triangoli rettangoli XAO, XBO son' uguali, a motivo del lato AO uguale al lato OB, e del lato comune OX, e per conseguente  $XB = AX$ : così XB è raggio del circolo. 2°. L'arco AHB del segmento AHB passa nell'elisse dal lato di A e da quello di B; perocchè essendo la tangente LA perpendicolare ad AX, ella è obliqua al grand'asse e alla sua tangente AG; donde avviene, che LA, e molto più l'arco AHB entra nell'elisse. Così ancora, s'io tiro in B la retta BF tangente al circolo, ella

Tomo II.

Gc

pu-

pure, e molto più BHA entrerà nell'elisse. 3°. Qualivoglia angolo, come ASB, iscritto nel segmento BHA equivale all'angolo dato *abc*; imperocchè, ugual' essendo l'angolo del segmento LAB all'acuto *abd*, qualunque angolo, come AKB, iscritto nell'altro segmento farà parimente uguale all'acuto *abd*, per essere AKB uguale all'angolo LAB: ora gli angoli ASB ed AKB vagliono insieme due retti, poichè insieme abbracciano l'intera circonferenza; però essendo l'angolo AKB uguale all'angolo *abd*, l'angolo ASB equivaler dee all'angolo *abc*, che unito ad *abd* vale pure due retti. 4°. L'arco AHB sega dee ( Fig. 486. ) l'asse minore in un punto H fuori dell'elisse: imperciocchè, se lo segasse all'estremità C, l'angolo ASB iscritto nel segmento ACB equivarrebbe all'angolo, che ha'l suo vertice all'estremità dell'asse minore, e ch'insiste all'asse maggiore, il ch'è contro l'ipotesi; e se lo segasse entro l'elisse in un punto H, l'angolo AHB iscritto nel segmento farebbe maggiore dell'angolo ACB, a cagione dell'angolo esterno AHO maggiore dell'interno ACH, e dell'esterno BHO maggiore dell'interno BCH; il ch'è similmente contro l'ipotesi. 5°. Dunque, perchè l'arco AHB ( Fig. 486. ) entra nell'elisse dal lato di A e da quello di B, e perchè quindi egli sega l'asse minore fuori dell'elisse, necessariamente conviene, ch'ei seghi l'elisse in due punti R, S: ora ciò posto, egli è manifesto, che le rette QE, SA son parallele, per essere BS diviso per mezzo in Z, siccome BA lo è in O; ciò che rende i triangoli BOZ, BAS simili fra loro, e l'angolo EZB, formato dal diametro EQ colla sua ordinata SB, uguale all'angolo ASB, ovvero al suo uguale *abc*. Parimente, per essere SA diviso per mezzo in T, siccome AB lo è in O, le rette TO, SB son parallele, e l'angolo ATP, formato dal diametro VP colla sua ordinata SA, è altresì uguale all'angolo ASB, ovvero al dato *abc*: così i due diametri QE, VP corrispondon perfettamente alla quistione, e sono in oltre fra lor conjugati, perocchè son reciprocamente paralleli alle loro ordinate. Lo stesso si proverebbe degli altri due diametri, che si sarebbero da meritrovarsi, se mi fossi servito del punto R.

*Dell'Iperbola considerata in un Piano fuori del Cono.*

767. PROBLEMA. Descrivere un'Iperbola.

Piglio due rette AB, CD ( Fig. 487. ) uguali, o disuguali, e le pongo perpendicolari l'una all'altra, in modo che si seghino ciascuna

scuna per mezzo in O. Prolungo indeterminatamente l'una delle due AB; sego il prolungamento BY in picciolissime parti uguali BM, MS, e per i punti di divisione faccio passare delle perpendicolari RV, LX. Intorno la linea AB io descrivo un circolo; e dal punto M tirando la tangente MN, cerco una quarta proporzionale alle due rette AB, CD e alla tangente MN, e la porto sopra la perpendicolare RMV da M in R, e da M in V. Così ancora, dal punto S io tiro la tangente ST, e cercando una quarta proporzionale alle due rette AB, CD e alla tangente ST, la porto sopra la perpendicolare LX da S in L, e da S in X. Lo stesso io faccio rispetto all'altre perpendicolari tirate sopra i punti di divisione d' RY, e facendo per i punti ritrovati e pel punto B passare una curva, le sue ordinate sono RM, LS, ec. le sue assisse son BM, MS, ec. e resta solo a provare, che detta curva è un' iperbola.

Per la costruzione, noi abbiamo  $AB \cdot CD :: MN \cdot MR$ , ed  $AB \cdot CD :: ST \cdot SL$ ; onde  $MN \cdot MR :: ST \cdot SL$ , ovvero  $MN \cdot ST :: MR \cdot SL$ , cioè l'ordinate MR, SL, ec. della curva sono fra se come le tangenti al circolo tirate da' punti M, S, ec. in cui quest'ordinate segnano le loro assisse.

Dunque innalzando l' tutto al quadrato, avremo  $\overline{MN} \cdot \overline{ST} :: \overline{MR} \cdot \overline{SL}$ . Ora  $\overline{MN} = MB \times AM$  ( N. 271. ), ed  $\overline{ST} = SB \times AS$ ;

però  $MB \times AM \cdot SB \times AS :: \overline{MR} \cdot \overline{SL}$ , cioè i quadri dell'ordinate MR, SL sono fra essi come i rettangoli delle loro assisse moltiplicate per la linea AB accresciuta di queste medesime assisse; e per conseguenza la curva è un' iperbola ( N. 634. ).

768. NOTA. 1°. Che divenendo le tangenti MN, ST tanto maggiori, quanto i punti M, S, ec. son più distanti dal punto B, l'ordinate MR, SL, ec. le quali sono quarte proporzionali alle rette AB, CD e alle tangenti, divengono pure altrettanto maggiori, quanto elle son più lontane dal vertice B; e ch' in conseguenza la curva si può prolungare in infinito, discostandosi sempre più dall'una e dall'altra parte della linea BY. 2°. Che facendosi la stessa costruzione dal lato di A, s'avrà un'altra curva QZA simile ed uguale alla prima HBP.

769. DIFFINIZIONE. La retta AB dicesi primo, e la retta CD secondo *asse*; il punto O, in cui queste due rette si segano, appellasi *centro*, e le due curve HBP, QAZ diconsi *Iperbole opposte*.  
Cc 2 Qua-

Qualunque linea, che passa pel centro O, e sega l'iperbole opposte, dicefi *primo diametro*; e quelle linee, che passano pel centro O senza segar l'iperbole, chiamansi *secondi diametri*. Il *parametro* del primo asse è una linea terza proporzionale al primo e secondo asse; e'l *parametro* del secondo è una linea terza proporzionale al secondo asse, e al primo.

La retta CD appellasi secondo asse, perocchè sega per mezzo tutte le linee, come Vu, che ad essa son perpendicolari, e che vanno a terminare sopra l'iperbole; essendo manifesto, che se in queste due curve si pigliano due ordinate MV, mu equidistanti da' loro vertici B, A, ed in conseguenza uguali, la retta Vu tirata dalle loro estremità farà perpendicolare a CD, che la segnerà per mezzo, poichè Mm è segata per mezzo da CD.

770. COROLLARIO I°. Il quadro di qualsivoglia ordinata LS al primo asse è al rettangolo corrispondente SB x AS, come il quadrato dell'asse minore è a quello del maggiore.

Per la costruzione, noi abbiamo LS . ST :: CD . AB; onde  $\overline{LS} . \overline{ST} :: \overline{CD} . \overline{AB}$ ; ma  $\overline{ST} = \overline{SB} \times \overline{AS}$  ( N. 271. ); dunque  $\overline{LS} . \overline{SB} \times \overline{AS} :: \overline{CD} . \overline{AB}$ .

771. COROLLARIO II. Il quadro di qualsivoglia ordinata LS al primo asse è al rettangolo corrispondente SB x AS, come il parametro del primo asse è al medesimo primo asse AB.

Chiamo P il parametro del primo asse, e per la definizione di questo parametro si ha :: AB . CD . P ( N. 769. ); e però  $\overline{AB} . \overline{CD} :: \overline{AB} . P$  ( N. 393. ), ovvero  $\overline{CD} . \overline{AB} :: P . \overline{AB}$ ; ora pel Corollario precedente noi abbiamo  $\overline{LS} . \overline{SB} \times \overline{AS} :: \overline{CD} . \overline{AB}$ ; dunque  $\overline{LS} . \overline{SB} \times \overline{AS} :: P . \overline{AB}$ .

772. COROLLARIO III. Se al vertice B del primo asse AB ( Fig. 488. ) alzasi una perpendicolare HB uguale al parametro di detto asse, e che dall'estremità H di esso parametro e dall'altra estremità A dell'asse AB si tiri una retta indefinita AT, che segghi in T qualsivoglia ordinata SL prolungata, se sia d'uopo, il quadro LS di quest'ordinata equivale al rettangolo della sua assissa SB moltiplicata per la retta TS.

I triangoli simili ABH, AST ci danno AB . BH :: AS . ST; e moltiplicando gli ultimi due termini per BS, avremo AB . BH :: AS x BS . TS x BS, ovvero TS x BS . AS x BS :: BH . AB;

AB: ora  $\overline{LS}$ . AS  $\times$  BS : : BH. AB ( N. 771. ) ; onde TS  $\times$  BS . AS  $\times$  BS : :  $\overline{LS}$ . AS  $\times$  BS, e però TS  $\times$  BS =  $\overline{LS}$  a motivo de' due conseguenti uguali.

773. COROLLARIO IV. Il quadro di qualsivoglia ordinata LV al secondo asse CD ( Fig. 489. ) è a quello della sua affissa VO, più 'l quadrato del semiasse secondo DO, come il quadro del primo asse è a quello del secondo.

Da L tiro l'ordinata LS al primo asse, ed ho  $\overline{LS}$ . SB  $\times$  SA : :  $\overline{GD}$ .  $\overline{AB}$  ( N. 770. ) : ora, essendo AB diviso per mezzo in O, ed essendogli aggiunta BS, abbiamo SB  $\times$  BA =  $\overline{OS}$  —  $\overline{BO}$ ; perciò  $\overline{LS}$ .  $\overline{OS}$  —  $\overline{BO}$  : :  $\overline{CD}$ .  $\overline{AB}$ : ma i quadrati  $\overline{CD}$ ,  $\overline{AB}$  degli assi sono fra se come i quadri  $\overline{OD}$ ,  $\overline{OB}$  delle loro metà, dunque  $\overline{LS}$ .  $\overline{OS}$  —  $\overline{BO}$  : :  $\overline{OD}$ .  $\overline{OB}$ , ovvero  $\overline{LS}$ .  $\overline{OD}$  : :  $\overline{OS}$  —  $\overline{BO}$ .  $\overline{BO}$ ; e componendo, avremo  $\overline{LS} + \overline{OD}$ .  $\overline{OD}$  : :  $\overline{OS}$  —  $\overline{BO} + \overline{BO}$ .  $\overline{BO}$ , cioè  $\overline{LS} + \overline{OD}$ .  $\overline{OD}$  : :  $\overline{OS}$ .  $\overline{BO}$ : ora LS = VO, ed OS = VL, poichè VOSL è un parallelogrammo; onde  $\overline{LS} = \overline{VO}$ , ed  $\overline{OS} = \overline{VL}$ ; e sostituendo questi valori nell'ultima proporzione, avremo  $\overline{VO} + \overline{OD}$ .  $\overline{OD}$  : :  $\overline{VL}$ .  $\overline{BO}$ , ovvero  $\overline{VL}$ .  $\overline{VO} + \overline{OD}$  : :  $\overline{BO}$ .  $\overline{DO}$  : :  $\overline{AB}$ .  $\overline{CD}$ .

NOTA. Mostriamo a suo luogo, onde nasca, che la proprietà dell'iperbola rispetto al secondo asse non è qui la stessa ch'è rispetto al primo.

774. COROLLARIO V. Il quadro di qualsivoglia ordinata LV al secondo asse è a quello della sua affissa VO, più 'l quadrato del semiasse secondo CO, come il parametro di detto asse è all' asse CD.

Chiamo  $p$  il parametro del secondo asse, e per la definizione di esso parametro, ho : : CD. AB.  $p$ ; dunque  $\overline{CD}$ .  $\overline{AB}$  : : CD.  $p$  ( N. 393. ), ovvero  $p$ . CD : : AB.  $\overline{CD}$ ; ma noi abbiamo  $\overline{LV}$ .  $\overline{VO} + \overline{OC}$  : : AB.  $\overline{CD}$ ; però  $\overline{LV}$ .  $\overline{VO} + \overline{OC}$  : :  $p$ . CD. 775. CO.

775. COROLLARIO VI. *Qualsivoglia linea OZ ( Fig. 489. ), che passa pel centro O e sega l'iperbola, non la sega che in un sol punto R.*

Da R tiro l'ordinata RM al primo asse, e da qualsivoglia altro punto S, preso sopra BS al di sotto di M, ne tiro un'altra LS, che sega OZ in T. I triangoli simili OMR, OST ci danno  $MR : TS :: OM : OS$ ; dunque  $\overline{RM} : \overline{TS} :: \overline{OM} : \overline{OS}$ . Ora, per la proprietà dell'iperbola, noi abbiamo  $\overline{RM} : \overline{LS} :: MB \times AM : SB \times AS$  ( N. 767. ) :  $\therefore \overline{MO} - \overline{BO} : \overline{SO} - \overline{OB}$  ( N. 148. ) : ma  $\overline{MO} - \overline{BO}$  è minore rispetto ad  $\overline{SO} - \overline{OB}$  di quello sia  $\overline{OM}$  rispetto ad  $\overline{OS}$ ; giacchè, per fare che vi fosse proporzione fra i quattro termini  $\overline{MO} - \overline{BO}$ ,  $\overline{SO} - \overline{OB}$ ,  $\overline{MO}$  ed  $\overline{OS}$ , converrebbe, che la parte  $\overline{BO}$ , la quale togliesi da  $\overline{MO}$ , fosse alla parte  $\overline{OB}$ , che levasi da  $\overline{SO}$ , nella stessa ragione che  $\overline{MO}$  è ad  $\overline{SO}$ , e per conseguente, che la parte  $\overline{BO}$  tolta da  $\overline{MO}$  fosse minore della parte  $\overline{BO}$  levata da  $\overline{SO}$ ; onde, poichè da  $\overline{MO}$  togliesi più del bisogno, conviene di necessità, che  $\overline{MO} - \overline{BO}$  sia minore rispetto ad  $\overline{SO} - \overline{OB}$  che  $\overline{MO}$  rispetto ad  $\overline{OS}$ ; e per conseguenza  $\overline{RM}$  è altresì minore rispetto ad  $\overline{LS}$  di quello sia  $\overline{RM}$  rispetto a  $\overline{TS}$ . Donde ne segue, che  $\overline{LS}$  è maggior di  $\overline{TS}$ , e quindi LS di TS; e però 'l punto T della retta OT è nell'iperbola: ora siccome lo stesso si proverebbe rispetto a tutti gli altri punti della retta RZ, così egli è manifesto, esser'ella interamente nell'iperbola.

776. COROLLARIO VII. *Se una retta OR, che passa pel centro O, sega l'iperbola in un punto R, dico; ch'essendo detta linea prolungata di là dal vertice, segnerà l'iperbola opposta in un punto X, talmente che l'intera linea RX sarà divisa per mezzo dal centro O.*

Tiro l'ordinata RM, faccio  $OX = OR$ , e dal punto X io conduco XZ parallela ad RM, finattanto ch'essa tagli 'l primo asse BA prolungato in Z. I triangoli simili ORM, OXZ ci danno  $OR : OX :: OM : OZ$ , e quindi  $OM = OZ$ : ora  $OB = OA$ ; onde  
l'ac

## DELLE MATEMATICHE. 207

l'affissa BM equivale all'affissa AZ, ed in conseguenza l'ordinata RM equivaler dee all'ordinata condotta dal punto Z, mercè che le due iperbole opposte son perfettamente uguali: ma ne' triangoli simili ed uguali ORM, OXZ noi abbiamo  $RM = XZ$ ; dunque XZ è l'ordinata condotta dal punto X, e la retta RX, segata per mezzo in O, passa per l'estremità X di quest' ordinata; e nello stesso modo ch'abbiam dimostrato, che RZ è nell'iperbola (N. 775.), mostreremo pure, ch'essa taglia l'iperbola opposta in X, ovvero che la sua parte indefinita XY è tutta nell'iperbola opposta.

**777. PROBLEMA.** *Da un punto L preso sopra l'iperbola (Fig. 490.) tirare una tangente alla curva.*

Se'l punto L fosse al vertice B, egli è manifesto, che la tangente sarebbe la linea BK tirata parallela all'ordinate; perocchè tutt'i punti della curva d'ambe le parti sono, per la costruzione dell'iperbola, al di sotto di detta linea.

Ma se'l punto L non trovasi al vertice B, tiro l'ordinata LS al primo asse, e pigliando una terza proporzionale OT alle due linee OS, OB, tiro la retta LT, ch'è la tangente ricercata; il che io provo nel seguente modo.

Intorno 'l primo asse descrivo 'l circolo AVB, e dal punto T conducendo l'ordinata TV a detto circolo, la retta VS tirata da V per S è tangente del medesimo, e si ha  $OS : OB :: OB : OT$ , ovvero  $OT \cdot OB :: OB \cdot OS$  (N. 292.); poscia ne tiro un'altra MR al primo asse fra L e T, la quale seghi l'iperbola in R, e la retta LT in qualche punto Q, senza curarmi se questo punto sia entro, o fuori dell'iperbola.

I triangoli simili LTS, QTM ci danno  $LS \cdot QM :: TS \cdot TM$ , e dal punto M tirando la retta MX parallela ad VS, ho  $TS \cdot TM :: SV \cdot MX$ , a motivo de' triangoli simili TSV, TMX; onde  $LS \cdot QM :: SV \cdot MX$ , e perciò  $\overline{LS} \cdot \overline{QM} :: \overline{SV} \cdot \overline{MX}$ ; ora  $\overline{SV} = SB \times AS$ ; dunque  $\overline{LS} \cdot \overline{QM} :: SB \times AS \cdot \overline{MX}$ , ovvero  $\overline{LS} \cdot SB \times AS :: \overline{QM} \cdot \overline{MX}$ : ma per la proprietà della curva noi abbiamo  $\overline{LS} \cdot SB \times AS :: \overline{RM} \cdot MB \times AM$ ; però  $\overline{QM} \cdot \overline{MX} :: \overline{RM} \cdot MB \times AM$ : ora  $\overline{MX}$  è maggiore di  $\overline{MB} \times \overline{AM}$ , poichè MX è tirata parallela alla tangente SV del circolo (N. 306.); dunque  $\overline{QM}$  è altresì maggiore di  $\overline{RM}$ , e quindi



di QM maggiore di RM; donde avviene, che'l punto Q della linea LT è fuori dell'iperbola; ciò che noi proveremo ancora di tutt'i punti di detta linea compresi fra L e T.

Al di sotto del punto L tiro al primo asse un'altra ordinata HP, che seggh'in Z la retta TLZ, e conduco HN parallela alla tangente SV del circolo, finattanto ch'essa tagli l'ordinata TV di detto circolo in un punto N. I triangoli simili TLS, TZH ci danno  $LS : ZH :: ST : HT$ , e a cagione de' triangoli simili TSV, THN, noi abbiamo  $ST : HT :: SV : HN$ ; dunque  $LS : ZH :: SV : HN$ , ed  $LS \cdot ZH :: SV \cdot HN$ ; ma  $SV = SB \times AS$ ; però  $LS \cdot ZH :: SB \times AS \cdot HN$ , ovvero  $LS \cdot SB \times AS :: ZH \cdot HN$ ; ora, per la proprietà della curva, noi abbiamo  $LS \cdot SB \times AS :: PH \cdot HB \times AB$ ; onde  $PH \cdot HB \times AH :: ZH \cdot HN$ ; ma  $HN$  è maggiore di  $HB \times AH$  (N. 306.); perciò  $ZH$  è maggiore di  $PH$ , e  $ZH$  di  $PH$ ; donde ne segue, che'l punto Z della retta ZT è fuori della curva; ciò che noi proveremo ancora di tutti gli altri punti di detta linea presi al di sotto di L: ma noi abbiám veduto, che tutt'i punti della stessa linea, presi fra L e T, sono pure fuori della curva; dunque TLX non tocca l'iperbola che in L.

778. COROLLARIO I°. *Tutte le tangenti, che tirar si possono da ciascun punto d'un'iperbola (Fig. 491.), sono fra se inclinate, e si segano infra i loro punti del contatto.*

Se le tangenti LT, QP sono l'una dall'uno e l'altra dall'altro lato del primo asse, è manifesto, che andando queste tangenti a terminare all'asse, debbono segarsi in Z fra i loro punti del contatto L, Q.

Se le tangenti QP, RH sono da una stessa parte dell'asse, da' punti del contatto io tiro l'ordinate QS, RM, ed ho per la prima  $SO : BO : OP$  (N. 777.), e per la seconda  $MO :$

$BO : OH$ ; onde  $SO \times OP = OB^2$ , ed  $MO \times OH = OB^2$ ; dal che io deduco  $SO \times OP = MO \times OH$ , ed  $SO : MO :: OH : OP$ ; ora  $SO$  è minore di  $MO$ ; dunque  $OH$  è minore di  $OP$ ; e quindi la tangente RH, il cui punto del contatto R è più distante dal vertice B, sega l'asse in un punto H, ch'è altresì più dif.

## DELLE MATEMATICHE. 209

distante dal vertice. Ma questa tangente non può passare da R in H, se non sega la tangente PQX; ed essa non può segarla al punto del contatto in Q, perchè in tal caso segherebbe l'iperbola in due punti R, Q, il ch'è impossibile; non può nè meno detta tangente segar QP infra Q, e P, poichè dovrebbe di necessità passare nell'iperbola, e più non sarebbe tangente; però RH dee segar PQX in qualche punto V fra R e Q.

779. COROLLARIO II. *Da uno stesso punto L non si può all'iperbola tirare che una sola tangente.*

La dimostrazione di ciò è simile a quella della parabola (N.646.).

780. COROLLARIO III. *Data una tangente LT (Fig.492.), e l'ordinata LS al primo asse, condotta dal punto del contatto, avremo 1°. SB. BT :: AS. AT. 2°. SB. ST :: SO. SA.*

Intorno l' primo asse io descrivo l' circolo AVB, e dal punto T conducendo l' ordinata TV a detto circolo, la retta VS tirata dal punto V ad S farà tangente del circolo in V, a motivo di ::SO. BO. OT ( N. 292. ); onde rispetto al circolo noi avremo SB. BT :: AS. AT ( N.296. ), ed SB. ST :: SO. SA (N.294.); ma queste linee sono le stesse rispetto all'iperbola; dunque, ec.

781. COROLLARIO IV. *Poste le stesse cose del precedente Corollario, se dal punto del contatto L alzasi sopra TL una perpendicolare LP, dico; che la superperpendicolare SP è alla distanza SO dell' ordinata LS al centro O, come 'l parametro del primo asse è all' asse medesimo.*

Chiamando P il parametro del primo asse, si ha  $\overline{LS} \cdot SB \times AS :: P \cdot AB$ ; ora, a motivo della perpendicolare LS abbassata dal vertice del triangolo rettangolo TLP sopra la sua ipotenusa TP,

noi abbiamo  $\overline{LS} = TS \times SP$ , e a cagione di SB. ST :: SO. SA ( N. 780. ) si ha  $SB \times SA = ST \times SO$ ; onde  $TS \times SP, TS \times SO :: P \cdot AB$ ; ma poichè i due rettangoli  $TS \times SP, TS \times SO$  hanno una comun dimensione TS, essi sono fra loro come SP, SO; dunque  $SP. SO :: P \cdot AB$ .

782. COROLLARIO V. *Poste ancora le stesse cose, se dal punto del contatto L tirasi l'ordinata LX al second' asse, e che si prolunghi la tangente fino al concorso di detto asse in H, avremo*

$HO \times OX = \overline{OC}^2$ , cioè l' rettangolo HO x OX uguale al quadrato del picciolo semiasse.

I triangoli simili SLT, HTO ci danno  $ST. OT :: LS. OH$ ;

Tomo II.

Dd

c mol.

e moltiplicando i primi due termini per  $\overrightarrow{OS}$ , e gli ultimi due per  $\overrightarrow{LS}$ , avremo  $\overrightarrow{ST} \times \overrightarrow{OS} \cdot \overrightarrow{OT} \times \overrightarrow{OS} :: \overrightarrow{LS} \cdot \overrightarrow{SL} \times \overrightarrow{OH}$ , ovvero  $\overrightarrow{OX} \times \overrightarrow{OH}$ , a motivo di  $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{SL}$ ; ora, a cagione di  $\overrightarrow{SO} \cdot \overrightarrow{OB} :: \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OT}$  (N. 777.), noi abbiamo  $\overrightarrow{OT} \times \overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OB}$ , e poichè  $\overrightarrow{SB} \cdot \overrightarrow{ST} :: \overrightarrow{SO} \cdot \overrightarrow{SA}$  ( N. 780. ), noi avremo  $\overrightarrow{SB} \times \overrightarrow{AS} = \overrightarrow{ST} \times \overrightarrow{SO}$ ; dunque  $\overrightarrow{SB} \times \overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{OB} :: \overrightarrow{SL} \cdot \overrightarrow{OH} \times \overrightarrow{OX}$ , ovvero  $\overrightarrow{SL} \cdot \overrightarrow{SB} \times \overrightarrow{AS} :: \overrightarrow{OH} \times \overrightarrow{OX} \cdot \overrightarrow{OB}$ ; ma per la proprietà della curva noi abbiamo  $\overrightarrow{SL} \cdot \overrightarrow{SB} \times \overrightarrow{AS} :: \overrightarrow{CO} \cdot \overrightarrow{OB}$ ; onde  $\overrightarrow{OH} \times \overrightarrow{OX} \cdot \overrightarrow{OB} :: \overrightarrow{CO} \cdot \overrightarrow{OB}$ , e perciò  $\overrightarrow{OH} \times \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{CO}$ , a motivo de' conseguenti uguali  $\overrightarrow{OB}$ ,  $\overrightarrow{OB}$ .

783. DIFFINIZIONE. Se dall' estremità D del secondo asse CD ( Fig. 493. ) tirasi all'estremità del primo la retta DB, e che presa col compasso la retta DB ella si porti sul primo asse prolungato d'ambe le parti da O in E, e da O in G, i punti E, G s'appelleranno i *Fuochi* dell'iperbole opposte.

784. COROLLARIO I°. Se dall'uno de' fuochi E tirasi un' ordinata EF al primo asse, il rettangolo  $\overrightarrow{EB} \times \overrightarrow{AE}$ , corrispondente a quest' ordinata, equivale al quadro della metà OD del secondo asse.

Imperocchè nel triangolo rettangolo ODB noi abbiamo  $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OB}$ ; ma  $\overrightarrow{EB} \times \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OB}$  ( N. 148. ); dunque  $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{EB} \times \overrightarrow{AE}$ .

785. COROLLARIO II. Se dall'estremità D del secondo asse tirasi DM parallela al primo, e dal punto M l'ordinata MN al primo, il rettangolo  $\overrightarrow{NB} \times \overrightarrow{AN}$  corrispondente equivale al quadro della metà OB del primo asse.

Per la proprietà della curva,  $\overrightarrow{NM} \cdot \overrightarrow{NB} \times \overrightarrow{AN} :: \overrightarrow{DO} \cdot \overrightarrow{OB}$ ; ma  $\overrightarrow{NM} = \overrightarrow{DO}$  a motivo delle parallele; dunque  $\overrightarrow{NB} \times \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{OB}$ .

786. PROPOSIZIONE CLIII. Se dall'uno de' fuochi E (Fig. 494.) tirasi un'ordinata EF al primo asse, la medesima equivale alla metà del parametro del primo asse.

Per

## DELLE MATEMATICHE. 211

Per la proprietà della curva,  $\overline{EF} \cdot EB \times AE :: \overline{OD} \cdot \overline{OB}$  ;  
 ma  $EB \times AE = \overline{OD}$  ( N. 784. ) ; onde  $\overline{EF} \cdot \overline{OD} :: \overline{OD} \cdot \overline{OB}$  ,  
 e quindi  $\overline{OB} \cdot \overline{OD} :: \overline{OD} \cdot \overline{EF}$  , e  $OB \cdot OD :: OD \cdot EF$  :  
 ora, per la definizione del parametro del primo asse ch' io chiamo  
 P, noi abbiamo  $AB \cdot CD :: CD \cdot P$  ; dunque pigliando le metà  
 di ciascun termine, si ha  $OB \cdot OD :: OD \cdot \frac{1}{2}P$ ,  $OD \cdot \frac{1}{2}P :: OD \cdot EF$ ,  
 e perciò  $\frac{1}{2}P = EF$ .

787. PROPOSIZIONE CLIV. *Dato il primo asse AB, e un diametro KL ( Fig. 495. ), colle lor tangenti BV, LT, i triangoli TRB, VRL formati dalle tangenti coll' asse e col diametro son' uguali.*

Dal punto L tiro l'ordinata LS al primo asse, ed ho OS. OB : : OB. OT ( N. 777. ) ; ora i triangoli simili OBV, OSL ci danno OS. OB : : OL. OV ; onde OL. OV : : OB. OT , e per conseguenza tirando le linee LB, VT , elle son parallele ; ora i triangoli LBV, LBT, compresi fra queste due parallele , son' uguali, perocchè hanno la base comune LB ; dunque d' ambedue le parti togliendo il triangolo comune LRB , avremo TRB = VRL.

788. COROLLARIO. *Il triangolo LTS formato dalla tangente LT del diametro KL col primo asse, e colla sua ordinata LS condotta dal punto del contatto, equivale al trapezoide formato dalla stessa ordinata LS, colla tangente BV del primo asse compresa fra'l detto primo asse, e'l diametro.*

I triangoli TRB, VRL sono uguali ( N. 787. ) ; però ad ambe le parti aggiugnendo BRLS , avremo LTS = BSLV.

NOTA. HO provato sopra ( N. 776. ), che ciascun diametro LK, terminato fra le due curve opposte, era diviso per mezzo nel centro O: ora, per non ingrandire troppo le Figure, il che ci altrignerebbe a moltiplicare il numero delle Tavole, lascerò nelle Figure delle seguenti Proposizioni di descrivere l' iperbola opposta, e la metà d'un diametro LK resterà indeterminata ; ma nel discorso dovrem sempre supporre, che K sia'l punto, in cui'l diametro LK sega la curva opposta ; e così degli altri.

789. PROPOSIZIONE CLV. *Dato il primo asse AB, e un diametro KL ( Fig. 496. ), colle lor tangenti BV, LT, che terminano l'una all' asse e l'altra al diametro, se da qualsivoglia punto X preso sopra la curva tiransi due rette FH, PM parallele al-*

Dd 2

Js

le tangenti, e che terminino al primo asse e al diametro; dico 1°. che 'l triangolo HXM, fatto da queste parallele col primo asse, equivale al trapezoide VBMP, fatto dalla tangente SB del primo asse e dalla sua parallela XM, comprese fra 'l primo asse e 'l diametro. 2°. che 'l triangolo PXF, fatto dalle due parallele e dal diametro OL, equivale al trapezoide LTHF, fatto dalla tangente LT del diametro e dalla sua parallela FX, comprese fra 'l diametro e 'l primo asse.

I triangoli simili TLS, HXM ci danno  $TLS : HXM :: \overline{LS} : \overline{XM}$ ; ora, per la proprietà della curva, noi abbiamo  $\overline{LS} \cdot \overline{XM} :: SB \times AS. MB \times AB$ , ed egli ci è noto, che  $CB \times AS. MB \times AB :: \overline{SO} - \overline{OB} : \overline{MO} - \overline{OB}$  (N.148.); onde  $\overline{LS} \cdot \overline{XM} :: \overline{SO} - \overline{OB} : \overline{MO} - \overline{OB}$ , e  $TLS : HXM :: \overline{SO} - \overline{OB} : \overline{MO} - \overline{OB}$ ; e in vece de' quadri  $\overline{SO}, \overline{OB}, \overline{MO}$  ponendo i triangoli simili OLS, OBV, OPM, che sono nella stessa ragione (N. 392.), avremo  $TLS : HXM :: OLS - OBV : OPM - OBV$ , cioè  $TLS : HXM :: VBSL : VBMP$ ; ma  $TLS = VBSL$  (N.788.); però  $HXM = VBMP$ . Il che doveasi 1°. dimostrare.

Noi abbiamo  $TLS = VBSL$ , e levando da una parte il triangolo HXM e dall'altra il trapezoide VBMP uguale ad HXM, come s'è veduto, resterà  $TLYH + XMSY = PMSL$ ; poscia d'amendue i lati togliendo la parte comune XMSY, avremo  $TLYH = PXYL$ ; finalmente all'una e all'altra parte aggiugnendo il picciolo triangolo LYF, avremo  $TLFH = PXF$ . Il che doveasi 2°. dimostrare.

NOTA. Il punto X può trovarsi o di là dal punto L, o dall'altro lato della curva; ma la dimostrazione di questi due casi punto non differisce da quella della parabola (N. 652.).

790. COROLLARIO 1°. Tutte le linee, come XZ (Fig.497.), parallele a qualunque tangente LT e secanti l'iperbola, sono tagliate per mezzo dal diametro KL, che passa pel punto del contatto L.

Prolungo la retta XZ, finchè seghi 'l primo asse in H; e da' punti X, Z, ne' quali questa retta sega l'iperbola, tiro delle rette MP, ZG parallele alla tangente BV del primo asse. A cagione delle rette FM, ZH, parallele alle tangenti BV, LT del primo asse,

asse, e del diametro KL, il triangolo PXF, fatto con queste parallele e col diametro, equivale al trapezoide LTHF ( N. 739. ) : similmente, a motivo delle rette ZH, ZG parallele alle tangenti BV, LT, il triangolo ZFI, fatto da queste parallele col diametro OL prolungato, è altresì uguale al trapezoide LTHF; dunque il triangolo PXF equivale al triangolo ZFI: ma questi due triangoli son simili, a cagione delle parallele PM, ZG; ond' essi sono perfettamente uguali, e'l lato XF è uguale al lato FZ; però XZ è diviso per mezzo in F.

791. COROLLARIO II. Dunque qualsivoglia linea XZ, parallela alla tangente LT d'un diametro KL segante l'iperbola, è una doppia ordinata al diametro OL, e la sua metà XF, ovvero ZF n'è l'ordinata.

Quindi si scorge, che a ragione ( N. 769. ) noi abbiam chiamato Diametri tutte le linee, come OL, che passan pel centro O, e segano l'iperbola in un punto L.

792. COROLLARIO III. I quadri dell' ordinate XF, EY ( Fig. 498. ) a qualunque diametro KL sono fra se come i rettangoli delle loro assisse moltiplicate pel diametro KL accresciuti di queste medesime assisse.

Tiro la tangente BV del primo asse; prolungo l'ordinate FX, YE fino al concorso del primo asse in H e Q, e da' punti X, E, ne quali quest' ordinate segan l'iperbola, tiro le rette XP, EZ parallele alla tangente BV. Il triangolo PXF, fatto col diametro OL e colle due linee PX, XF parallele alle tangenti BV, LT, equivale al trapezoide LTHF ( N. 789. ), e per la stessa ragione il triangolo ZEY è uguale al trapezoide LTQY; dunque PXF. ZEY :: LTHF. LTQY: ora, perchè simili sono i triangoli PXF, ZFY, noi abbiamo  $\overrightarrow{PXF} . \overrightarrow{ZEY} :: \overrightarrow{FX} . \overrightarrow{YE}$  ( N. 392. ); però  $\overrightarrow{FX} . \overrightarrow{YE} :: \overrightarrow{LTHF} . \overrightarrow{LTQY}$ : ma  $\overrightarrow{LTHF} = \overrightarrow{OFH} - \overrightarrow{OLT}$ , ed  $\overrightarrow{LTQY} = \overrightarrow{OYQ} - \overrightarrow{OLT}$ ; onde  $\overrightarrow{FX} . \overrightarrow{YE} :: \overrightarrow{OFH} - \overrightarrow{OLT} . \overrightarrow{OYQ} - \overrightarrow{OLT}$ ; ed in vece de' triangoli simili OFH, OLT, OYQ, ponendo i quadri  $\overrightarrow{OF}$ ,  $\overrightarrow{OL}$ ,  $\overrightarrow{OY}$  de' loro lati omologhi, i quali quadri sono nella stessa ragione di detti triangoli, avremo  $\overrightarrow{FX} . \overrightarrow{YE} :: \overrightarrow{OF} - \overrightarrow{OL} . \overrightarrow{OY} - \overrightarrow{OL}$ : ma essendo il diametro LOK diviso per mezzo nel centro O ( N. 776. ) ed essendo ad esso

esso aggiunte le rette LF, LY, abbiamo  $FL \times FK = \overline{OF} - \overline{OL}$  ( N. 148. ), e perciò anche  $YL \times YK = \overline{OY} - \overline{OL}$ ; dunque  $\overline{FX} \cdot \overline{YE} : : FL \times FK. YL \times YK.$

NOTA. Che la proprietà dell'iperbola rispetto a tutt' i primi diametri, come KL, è la stessa ch'è rispetto al primo asse.

793. PROPOSIZIONE CLVI. *Dati due diametri LK, PZ ( Fig. 499. ) colle lor tangenti LT, TP, che si segano in T, se uniscons' i punti del contatto colla linea LP, e che pel mezzo X di detta linea tirisi la retta XT al punto T, ella sarà un diametro, e in conseguenza passerà pel centro O dell'iperbola.*

La dimostrazione è simile a quella della parabola ( N. 662. ).

794. AVVERTIMENTO. Mediante questa Proposizione, tutto ciò, che s'è sopra dimostrato rispetto al primo asse e ad un primo diametro, può altresì dimostrarsi rispetto a' due primi diametri PZ, LK ( Fig. 499. ), o alle loro metà OP, OL.

Poichè, prolungando le tangenti LT, PT fino al concorso de' diametri in H e Q, poscia tirando le rette RL, PM ordinate ai due diametri, cioè parallele alle tangenti, quindi la retta LP, e finalmente dal punto T la retta TF, che passa pel mezzo X della retta LP, e ch' in conseguenza sarà un diametro e passerà pel centro O ( N. 769. ), egli è per se evidente, ch' a motivo del parallelogrammo LTPF la retta TX, che passa per l'uno degli angoli X, e sega la diagonale LP in due parti uguali, passerà per l'angolo opposto F.

Ora i triangoli simili OFR, OTP ci danno  $OR. OP : : OF. OT$ , e a motivo de' triangoli simili OFP, OTH noi abbiamo  $OP. OH : : OF. OT$ ; dunque  $OR. OP : : OP. OH$ : così pure, i triangoli simili OFM, OTL ci danno  $OM. OL : : OF. OT$ , e a cagione de' triangoli simili OFL, OTQ abbiamo  $OL. OQ : : OF. OT$ ; quindi  $OM. LO : : OL. OQ$ ; donde si scorge, che le due rette OR, OM son divise proporzionalmente, e ch' in conseguenza le linee QH, LP, MR, che congiungono i loro punti di divisione, sono fra se parallele.

Dunque 1°. Se dato un diametro PZ da un punto L preso sopra la curva si vuol tirare una tangente, bisogna da detto punto condurre un' ordinata LR al diametro, quindi cercare una terza proporzionale OH alle rette OR, OP, e alla fine tirar la retta

LH,

## DELLE MATEMATICHE. 215

LH, che farà la tangente ricercata: così egli è lo stesso che rispetto al primo asse ( N. 777. ).

Dunque 2°. Il triangolo HTP, fatto dalle tangenti e dal diametro PZ, equivale al triangolo QTL, fatto dalle stesse tangenti col diametro LK; imperocchè, a motivo delle parallele QH, LP, i triangoli LHP, LPQ, che han la base LP comune, son' uguali; e però d'amendue le parti sottraendo il triangolo comune LTP, avremo  $HTP = QTL$ .

Dunque 3°.  $LHR = LQPR$ ; poichè ai triangoli uguali HTP, QTL aggiugnendo la parte comune LTPR, avremo  $LHR = LQPR$ .

Dunque 4°. Se da qualsivoglia punto S preso sopra la curva tiransi due rette VN, IE parallele alle tangenti, il triangolo VSE, fatto da queste parallele col diametro ZP, farà uguale al trapezoide QPEI, fatto dalla tangente PQ di esso diametro e dalla sua parallela IE, terminate fra i due diametri e l' triangolo ISN fatto dalle parallele; e l'altro diametro farà uguale al trapezoide LHVN, formato dalla tangente LH di esso diametro e dalla sua parallela NV, terminate fra i diametri; il che si dimostra come sopra ( N. 789. ).

795. PROPOSIZIONE CLVII. *Se dati due diametri LK, PZ ( Fig. 500. ) colle lor tangenti LH, PQ da' due punti E, F, presi sopra la curva fra i due diametri, tiransi due parallele ES, IX, ed FV, XR alle tangenti, il trapezoide NSFR, fatto da due di queste parallele col diametro PZ e colla più vicina all'altre due, è uguale al trapezoide ENVI, fatto da due altre di queste parallele col diametro LK e colla più vicina all'altre due: così pure il trapezoide ESRX, fatto da due parallele col diametro ZP e colla più lontana dall'altre due, equivale al trapezoide FVIX, formato dall'altre due parallele, e dalla più lontana delle due prime.*

La dimostrazione non differisce da quella della parabola ( N. 666. 667. ).

796. PROPOSIZIONE CLVIII. *Se due rette EH, FV (Fig 501.), terminate d' ambe le parti all'iperbola, si segano in un punto G nell'iperbola, il rettangolo EG x GH delle parti della prima EH è al rettangolo FG x GV delle parti della seconda, come il quadrato  $\overline{PT}$  della tangente del diametro della prima è al quadro  $\overline{LT}$  della tangente del diametro della seconda.*

La dimostrazione in tutt'i casi è simile a quella della parabola ( N. 668. ).

797. PRO-



797. PROPOSIZIONE CLIX. *Se prolungandosi due rette EI, FH ( Fig. 503. ), terminate dall'una e dall'altra parte alla curva, concorrono al di fuori in un punto R esterno all'iperbola, il rettangolo  $RF \times RH$  della parte esteriore RF della prima per l'intera linea RH è al rettangolo  $RE \times RI$  della parte esteriore RE della seconda per l'intera linea RI, come il quadro  $\overrightarrow{PT}$  della tangente del diametro della prima è al quadrato  $\overrightarrow{LT}$  della tangente del diametro della seconda.*

La dimostrazione è la stessa di quella della parabola ( N.669. ).

798. PROPOSIZIONE CLX. *Se data una tangente LT ( Fig. 503. ) coll'ordinata LS al primo asse dal punto T tirasi una secante TXZ, ella sarà divisa armonicamente ne' punti X, V, Z, in cui è divisa dalla curva e dall'ordinata LS.*

La dimostrazione non differisce da quella della parabola ( N.670. ); e quindi noi potremmo inferirne le medesime Proposizioni, che per la parabola abbiain dedotte ( N. 671. ) : lo stesso dicasi rispetto all' ellisse ; avendo già dimostrato ( N. 713. ), ch' una secante tirata dal punto, in cui la tangente sega l'asse, è altresì divisa armonicamente dalla curva, e dall'ordinata all'asse condotta dal punto del contatto.

799. PROPOSIZIONE CLXI. *Se dati due diametri LK, ZP ( Fig. 504. ) colle lor tangenti LT, TP tirasi un'ordinata XV all'uno de' diametri LK, e che si prolunghi, finchè incontri in R la tangente PT dell'altro diametro PZ, il rettangolo  $RX \times RV$  della parte esteriore RX per l'intera linea RV è al quadro  $\overrightarrow{RP}$  della parte RP, cui la retta VX sega sopra PT, come il quadrato  $\overrightarrow{LT}$  della tangente del diametro di VX è al quadro  $\overrightarrow{TP}$  della tangente dell'altro diametro.*

La dimostrazione è somigliante a quella della parabola ( N.672. ).

800. PROPOSIZIONE CLXII. *Se dati due segmenti ALB, CID ( Fig 505. ) le parti LX, PS de' lor diametri comprese in questi segmenti sono proporzionali a' loro diametri LK, PZ, i masimi triangoli iscritti in detti segmenti son' uguali.*

La dimostrazione in tutt'i casi è la stessa che quella dell' ellisse ( N. 737. ), sostituendo le proprietà dell'iperbola in vece di quelle dell' ellisse.

801. DIFFINIZIONE. Se dato il primo affe AB e 'l secondo CD ( Fig. 506. ) dall'una dell'estremità B del primo tirisi una tangente QP, sopra cui si prendano le parti BP, e BQ uguali ciascuna alla metà OD, ovvero OC del second' affe, le linee indefinite OL, OY tirate dal centro O per l'estremità P, Q della retta QP diconsi *Affintoti* dell'iperbola, e se dette linee si prolungano dall'altro lato del centro in X e Z, elle faranno gli affintoti dell'iperbola opposta, il cui vertice è 'l punto A.

802. COROLLARIO. Se dai termini C, D del second' affe tiransi delle linee all'estremità B del primo, dette due linee saranno uguali, a motivo di C e D equidistanti da B, e ciascuna d'esse sarà divisa per mezzo dagli affintoti ne' punti V, T.

Imperocchè tirando la retta DP, la figura ODPB sarà un rettangolo, e la diagonale OP segnerà in due parti uguali la diagonale BD; il che avverrà pure di CB. In oltre DB sarà parallela all'affintoto OY, a motivo di OD parallela ed uguale a QB; e per la stessa ragione anche CB sarà parallela all'affintoto DL.

803. PROPOSIZIONE CLXIII. L'iperbola è interamente nell'angolo YOL ( Fig. 506. ) fatto dagli affintoti, senza ch'essa li tocchi.

Si concepiscano infinite linee, come MN, ec. tirate parallele alla tangente, e che seghino l'iperbola e gli affintoti. I triangoli simili NEO, PBO ci danno  $NE : EO :: PB : BO$ ; dunque  $\overline{NE} . \overline{EO} :: \overline{PB} . \overline{BO}$ , ovvero  $\overline{OD} . \overline{OB}$ : ora, per la proprietà della curva, noi abbiamo  $\overline{EI} . \overline{EB} \times \overline{EA} :: \overline{OD} . \overline{OB}$ , ed  $\overline{EB} \times \overline{EA} = \overline{EO} - \overline{OB}$  ( N.148. ); onde  $\overline{EI} . \overline{EO} - \overline{OB} :: \overline{OD} . \overline{OB}$ , e però  $\overline{EI} . \overline{EO} - \overline{OB} :: \overline{NE} . \overline{EO}$ : ma  $\overline{EO} - \overline{OB}$  è minor di  $\overline{EO}$ ; dunque  $\overline{EI}$  è parimente minore di  $\overline{NE}$ , ed EI di NE, cioè 'l punto I della curva è fra gli affintoti, senza ch'ei li tocchi; e siccome ciò avverrà in qualunque caso, ne segue, che l'iperbola non toccherà giammai l'affintoto OL. Noi proveremo nello stesso modo, ch'ella non toccherà giammai l'affintoto OY.

804. COROLLARIO I°. Se concepiscansi infinite linee, come MN, ec. parallele alla tangente QP, ovvero al secondo diametro, e che seghino l'iperbola e gli affintoti, le parti MH, IN di ciascuna di dette linee, comprese fra la curva e gli affintoti, saranno fra loro uguali.

Tomo II.

E c

I trian-

I triangoli simili NEO, PBO ci danno  $NE : PB :: EO : BO$ , e a cagione dei triangoli simili MEO, QBO noi abbiamo  $ME : QP :: EO : BO$ ; dunque  $NE : PB :: ME : QB$ ; ora  $PB = QB$ ; onde  $NE = ME$ : ma  $HE = EI$ , per essere HI una doppia ordinata al primo asse; però  $NE - EI = ME - HE$ , cioè  $NI = MH$ .

805. COROLLARIO II. Ponendo sempre le rette MN, ec. parallele a QP, ovvero CD, il rettangolo  $MH \times HN$  della parte MH di ciascuna d'esse, comprese fra la curva e l'assintoto, pel residuo HN di queste stesse linee equivale al quadro  $\overline{QB}$ , ovvero  $\overline{CO}$  della metà del secondo asse.

A motivo de' triangoli simili MEO, QBO, noi abbiamo  $ME : EO :: QB : BO$ ; dunque  $\overline{ME} \cdot \overline{EO} :: \overline{QB} \cdot \overline{BO}$ : ora, per la proprietà della curva,  $\overline{HE} \cdot \overline{EB} \times \overline{EA}$ , od  $\overline{EO} - \overline{BO}$  (N. 148.) ::  $\overline{QB} \cdot \overline{BO}$ ; onde  $\overline{ME} \cdot \overline{EO} :: \overline{HE} \cdot \overline{EO} - \overline{BO}$ , ovvero  $\overline{ME} \cdot \overline{HE} :: \overline{EO} \cdot \overline{EO} - \overline{BO}$ ; però dividendo,  $\overline{ME} - \overline{HE} \cdot \overline{HE} :: \overline{EO} - \overline{EO} + \overline{BO} \cdot \overline{EO} - \overline{BO}$ ; il che si riduce ad  $\overline{ME} - \overline{HE} \cdot \overline{HE} :: \overline{BO} \cdot \overline{EO} - \overline{BO}$ : ora, perchè HI è divisa per mezzo in E, e perchè MH l'è aggiunta, abbiamo  $\overline{ME} - \overline{HE} = MH \times MI = MH \times HN$ , a cagione di  $MI = HN$ ; quindi  $MH \times HN \cdot \overline{HE} :: \overline{BO} \cdot \overline{EO} - \overline{BO}$ , od  $\overline{HE} \cdot \overline{EO} - \overline{BO} :: MH \times HN \cdot \overline{BO}$ : ma  $\overline{HE} \cdot \overline{EO} - \overline{BO} :: \overline{QB} \cdot \overline{BO}$ , ovvero  $\overline{CD} \cdot \overline{BO}$ ; dunque  $MH \times HN \cdot \overline{BO} :: \overline{QB} \cdot \overline{BO}$ , ovvero  $\overline{CD} \cdot \overline{BO}$ , e perciò  $MH \times HN = \overline{QB}$ .

806. COROLLARIO III. Tutt'i rettangoli  $MH \times HN$  sono dunque fra loro uguali, poichè son tutti uguali al quadrato  $\overline{QB}$ , ovvero  $\overline{CO}$ . Lo stesso dicasi de' rettangoli  $NI \times IM$ .

807. COROLLARIO IV. Le parti MH, od IN delle rette MN van diminuendo, a misura che le rette MN s'allontanano dal centro O.

Tutt'i rettangoli  $MH \times HN$  sono fra loro uguali: ora gli HN vanno aumentando, a misura ch'essi son più distanti dal centro O, im-

imperocchè le lor parti HE, essend' ordinate al primo asse, vanno crescendo, a misura che s' allontanan da O, e le lor parti EN, che sono gli elementi del triangolo OEN, vanno altresì aumentando, a misura che s' allontanan da O; dunque, poichè gli HN crescono, necessariamente conviene, a fin di conservare l' egualità de' rettangoli  $MH \times HN$ , che gli HM diminuiscono,

808. COROLLARIO V. *Gli assintoti OY, OL s' accostan sempre più all' iperbola, senza mai toccarla.*

Le doppie ordinate HI, ec. al primo asse saran sempre minori delle MN, ec. ( N. 803. ), e le MH, ovvero le IN andranno diminuendo, a misura che più s' allontaneran dal vertice O (N.807.); onde gli assintoti s' accosteranno sempre più alla curva, senza mai poterla toccare.

809. COROLLARIO VI. *Se da qualsivoglia punto H preso sopra la curva ( Fig. 507. ) tirasi una retta RHT parallela all' assintoto vicino OY, la parte RH di questa parallela, tirata dalla banda del centro O, sarà tutta fuori, e l' altra HT tutta dentro l' iperbola.*

Dal punto H tiro la retta MN parallela a QP, ovvero al secondo asse CD, ed infra MN e QP tiro un' altra parallela SL contenuta fra gli assintoti, similmente che MN. A cagione delle parallele MN, SL, ed MO, HR, noi abbiamo  $MH = SI$ : ma la parte SZ della parallela SL, contenuta fra l' assintoto OY e la curva, è maggiore della parte MH della retta MN ( N. 807. ); dunque SI è minor di SZ, e' l punto I della retta HR è fuori dell' iperbola. Si proverà nella stessa maniera, che tutti gli altri punti di HR son fuori della curva.

Fra gli assintoti al di sotto del punto H tiro un' altra retta FE parallela a QP; così, a cagione delle parallele MN, FE, ed FO, TR, noi avremo  $FX = MH$ : ora la parte Ff della retta FE, compresa fra l' assintoto OY e la curva, è minore di MH (N.807.); onde FX è maggior di Ff, e' l punto X della retta kHT è nell' iperbola. Si proverà in somigliante guisa, tutt' i punti della parte HT esser entro l' iperbola.

810. COROLLARIO VII. *Se dal centro O d' un' iperbola ( Fig. 507. ) tirasi una retta OG, che sega l' angolo YOÈ degli assintoti YO, OE, detta linea segnerà l' iperbola, e sarà un diametro.*

Quanto più la retta OG è prolungata, tanto più i suoi punti s' allontanano dall' assintoto OE, con cui ella forma l' angolo GOE;

Ec 2

e all'

e all'opposto, quanto più l'iperbola è prolungata dal lato di E, tanto più i suoi punti s'avvicinano all'affintoto (N.808.): ora la linea OE e l'iperbola si possono prolungare in infinito; dunque a forza di prolungare sì l'una che l'altra, troveremo necessariamente qualche punto G della linea OG, che farà più distante dall'affintoto OE, di quello sia il punto corrispondente g dell'iperbola. Così il punto G farà nell'iperbola: ma il punto O della retta OG n'è fuori; onde questa linea taglierà la curva in qualche punto; dopo di che è manifesto, ch'ella più non la segherà.

811. PROPOSIZIONE CLXIV. *Se da due, o più punti X, R, presi sopra la curva (Fig. 508.), tiransi delle rette XH, XS, ed RL, RI parallele agli affintoti, i rettangoli XH × XS, RL × LI saranno fra loro uguali.*

Da' punti X, R tiro delle rette HE, MN parallele a QP, ovvero CD, e che terminino agli affintoti. I triangoli simili MHX, HRI ci danno  $MX \cdot HX :: HR \cdot RI$ , e a motivo de' triangoli simili NXS, ERL noi abbiamo  $NX \cdot XS :: ER \cdot RL$ ; però moltiplicando i termini di questa proporzione per quei della prima, avremo  $MX \times NX \cdot HX \times XS :: HR \times ER \cdot RI \times RL$ ; ma i rettangoli  $MX \times NX$ ,  $HR \times ER$  sono fra loro uguali (N.806.); ond' egli lo son pure i rettangoli  $HX \times XS$ ,  $RI \times RL$ .

812. COROLLARIO I°. *Se dal vertice B io tiro le rette BV, BT parallele agli affintoti (Fig. 508.), e fra loro uguali, perchè sono le metà delle linee BD, BC tirate ai termini D, C dell'asse minore (N.802.), dico; che i rettangoli HX × XS, RL × RI saranno uguali ciascuno al quadro della retta VB, o della sua uguale BT.*

Imperocchè tirando al vertice B dell'iperbola la retta QP, uguale all'asse minore CD, e divisa per mezzo in B (N.801.), i triangoli simili MXH, QBV ci daranno  $MX \cdot XH :: QB \cdot BV$ , e a motivo de' triangoli simili NXS, PBT avremo  $NX \cdot XS :: PB \cdot BT$ ; onde moltiplicando i termini di questa per quei della precedente proporzione, avremo  $MX \times NX \cdot XH \times XS :: QB \times PB \cdot BV \times BT$ , ovvero  $\overline{BV} \cdot BV \times BT$ ; ora  $MX \times NX = \overline{QB}$  (N.802.); però  $XH \times XS = \overline{BV}$ ; ma  $XH \times XS = RI \times RL$ ; dunque anche  $RI \times RL = \overline{BV}$ .

NOTA. Da alcuni il quadro della retta BT, o della sua uguale BV

BV è detto *potenza* dell' iperbola ; poich' egli è sempre uguale a' rettangoli  $XH \times XS$ ,  $RI \times RL$ , ec.

813. COROLLARIO IL Se da qualsivoglia punto X , preso sopra l' iperbola (Fig. 508.) , tirasi una linea XH parallela all' asintoto OF, ch' è dall' altra parte della detta iperbola, il rettangolo  $XH \times OH$  della retta XH per la parte OH, ch' essa taglia sopra l' asintoto OY, è sempre uguale al quadro di BV, cioè alla potenza dell' iperbola.

Perocchè dal punto X tirando la retta XS parallela all' asintoto OY, avremo  $HX \times XS = \overline{BV}$  ( N. 812. ) ; ora, a cagione delle parallele HX, OS, ed HO, XS, noi abbiamo  $HO = XS$  ;

dunque  $HX \times XS = HX \times XO$ , e quindi  $HX \times HO = \overline{BV}$ . Ciò ch' è la proprietà dell' iperbola fra i suoi asintoti.

814. PROPOSIZIONE CLXV. Se da due, o più punti X, R, ec. ( Fig. 509. ) presi sopra l' iperbola tiransi delle linee XT, RS, ec. fra loro parallele e che coll' asintoto OY formino qualunque angolo ad arbitrio, e se da medesimi punti tiransi pure dell' altre linee XH, RL, ec. parallele fra loro e che coll' altro asintoto OF formino qualsivoglia angolo, dico ; che i rettangoli  $TX \times XH$ ,  $SR \times RL$ , ec. son tutti fra loro uguali.

Da' punti X, R, ec. tiro delle rette MN, EI fra gli asintoti, e parallele al secondo asse CD. I triangoli simili MTX, ERS ci danno  $TX \cdot MX :: SR \cdot ER$ , e a motivo de' triangoli simili HXN, LRI noi abbiamo  $HX \cdot XN :: LR \cdot RI$ ; onde moltiplicando i termini di questa proporzione per quei della precedente, avremo  $TX \times HX \cdot MX \times XN :: SR \times LR \cdot ER \times RI$ ; ma  $MX \times XN = ER \times RI$ ; dunque  $TX \times HX = SR \times RL$ .

815. PROPOSIZIONE CLXVI. Se fra gli asintoti s' tirasi una retta MN ( Fig. 510. ) , che segghi l' iperbola, e sia inclinata al primo asse, le parti MX, RN di detta linea, comprese fra la curva e gli asintoti, son uguali.

Sopra la retta MN piglio una parte NR uguale alla parte MX, senza curarmi, se l' estremità R di detta parte sia entro, o pur fuori dell' iperbola. Da R tiro le linee RT, RH parallele agli asintoti, e da X le rette XE, XS altresì parallele agli asintoti. Quindi è, che se 'l punto R è sopra la curva, i rettangoli  $RH \times RT$ ,  $SX \times XE$  dovranno necessariamente esser uguali ( N. 811. ). Però vediamo, se ci sarà possibile trovar quest' egualità.

I triangoli simili MSX, BHN, avendo 'l lato MX uguale al la-

to NR per la costruzione sono uguali, ed  $MS = RH$ ,  $SX = HN$ : ora, a cagione delle parallele, noi abbiamo  $SX = OE$ , ed  $RH = TO$ ; dunque  $OE = HN$ , e quindi  $OH$ , ovvero  $TR = EN$ , ed  $MS = TO$ . I triangoli simili  $MSX$ ,  $XEN$  ci danno  $MS$ , o pure  $TO$ .  $SX :: XE$ .  $EN$ , od  $OH$ ; onde  $TO \times OH$ , od  $RH \times RT = SX \times XE$ , ed in conseguenza il punto R è veramente sopra la curva.

816. COROLLARIO I°. *Se condotta fra gli affintori più linee MN, SL ( Fig. 511. ), parallele fra loro ed oblique all' asse, dal centro O tirasi il loro diametro OT, e dal vertice Z la tangente HV parallela ad MN, SL, ec. dico, che questa tangente sarà divisa per mezzo in Z.*

Le doppie ordinate XR, YI al diametro OT son divise per mezzo in E, T da esso diametro; dunque, se ad amendue i lati aggiungonfi le parti uguali MX, RN, ed SY, IL ( N. 815. ), s'avrà  $ME = EN$ , ed  $ST = TL$ : ora i triangoli simili OEN, OZV ci danno  $EN : ZV :: OE : OZ$ , e a motivo de' triangoli simili OEM, OZH noi avremo  $HZ :: OE : OZ$ ; però  $EN : ZV :: ME : HZ$ : ma  $EN = ME$ ; onde  $ZV = HZ$ .

817. COROLLARIO II. *Poste le medesime cose del precedente Corollario, i rettangoli  $MX \times XN$ ,  $SY \times YL$ , ec. delle parti MX, SY delle rette MN, SL per i residui XN, YL di queste stesse rette son' uguali fra loro e al quadro della metà ZV, ovvero ZH della tangente del diametro OT.*

Da' punti Y, X, Z tiro le rette Qq, Pp, Ff parallele fra loro e al secondo asse. I triangoli simili SYQ, MXP ci danno  $SY : QY :: MX : PX$ , e a motivo de' triangoli simili LYq, NXp noi abbiamo  $LY : Yq :: NX : Xp$ ; onde moltiplicando insieme i termini di queste due proporzioni, avremo  $SY \times LY : QY \times Yp :: MX \times NX : PX \times Xp$ ; ma  $QY \times Yq = PX \times Xp$  ( N. 806. ); dunque  $SY \times LY = MX \times NX$ .

Ora la retta Ff, non essendo tangente al punto Z, segnerà l'iperbola in due punti; e a motivo de' triangoli simili MXP, HZF, ed NXp, VZf, avremo  $MX : PX :: HZ : FZ$ , ed  $NX : Xp :: VZ : Zf$ ; però moltiplicando insieme queste due proporzioni, s'avrà  $MX \times NX : PX \times Xp :: HZ \times VZ$ , ovvero  $\overline{HZ} : FZ \times Zf$ : ma  $PX \times Xp = FZ \times Zf$  ( N. 806. ); onde  $MX \times NX = \overline{HZ}$ : ora  $MX \times NX = SY \times YL$ ; dunque  $SY \times YL = \overline{HZ}$ .

818. CO.

## DELLE MATEMATICHE. 223

818. COROLLARIO III. *Tutte le tangenti terminate fra i due assintoti son dunque segate per mezzo ne' punti del contatto.*

Ciò risulta ad evidenza del precedente Corollatio.

819. COROLLARIO IV. *Tirate fra gli assintoti due, o più tangenti MT, LR ( Fig. 512. ), i triangoli MTO, RLO, ed' esse formano cogli assintoti, sono fra loro uguali.*

Da' punti del contatto N, S tiro le rette NP, NV, SX, SZ parallele agli assintoti, il che mi dà  $PN \times NV = XS \times ZS$  ( N. 811. ); dal che io deduco  $NV \cdot ZS :: XS \cdot PN$ : ora i parallelogrammi PNVO, XSZO, avendo l'angolo POX comune, sono equiangoli, e poichè le lor basi NV, ZS son reciproche a' loro lati XS, PN, le lor' altezze, cioè le perpendicolari Xx, Pp farann' altresì reciproche alle basi, mercè che i triangoli simili XxS, PpN ci danno  $Xx \cdot Pp :: XS \cdot PN$ , e però  $Xx \cdot Pp :: NV \cdot ZS$ ; dunque  $Xx \times ZS = Pp \times NV$ , cioè i parallelogrammi XSZO, PNVO faran fra loro uguali: ora, a cagione della tangente MT divisa per mezzo in N, e di PN parallela ad OR, il lato MO del triangolo MOT è doppio del lato PO del parallelogrammo PNVO, e la sua base OT è altresì doppia della base OV, o PN dello stesso parallelogrammo; quindi'l triangolo MOT è doppio del parallelogrammo PNVO, e perciò anche il triangolo LRO è doppio del parallelogrammo XSZO; onde uguali essendo i parallelogrammi PNVO, XSZO, egli lo sono ancora i triangoli MOV, RML.

820. COROLLARIO V. *I triangoli MTO, RLO ( Fig. 512. ), formati da due tangenti MT, LR cogli assintoti, hanno i lati intorno all'angolo comune O reciproci fra loro.*

Noi abbiam ritrovato ( N. 819. )  $NV$ , ovvero  $PO \cdot ZS$ , od  $OX :: SX$ , od  $OZ \cdot PN$ , ovvero  $VO$ , cioè  $PO \cdot OX :: OZ \cdot OV$ ; onde raddoppiando tutt' i termini, avremo  $MO \cdot OR :: OL \cdot OT$ .

821. DIFFINIZIONE. Se descritte due iperbole opposte co' loro assintoti Yy, Tt ( Fig. 513. ) pigliafi'l second' asse CD delle stesse pel primo dell' altre due M $C_m$ , N $D_n$ , ch' avranno i loro vertici in C e D, e'l cui secondo asse sarà il primo AB, queste due nuove iperbole si chiameranno conjugate delle due opposte.

822. PROPOSIZIONE CLXVII. *L' iperbole conjugate hanno gli stessi assintoti dell' opposte ( Fig. 513. ).*

Da' vertici A, B dell' iperbole opposte e fra gli assintoti io conduco le tangenti HL, RS, parallele ed uguali ciascuna al second' asse



asse  $CD$  di quest'iperbole (N. 781.), e divise in oltre ciascuna per mezzo in  $A$  e  $B$ , siccome  $CD$  lo è in  $O$ ; quindi giugnendo le loro estremità colle rette  $HR$ ,  $LS$ , dette linee saran parallele ed uguali ciascuna al primo asse  $AO$  dell'iperbole opposte, e divise per mezzo in  $C$  e  $D$  dall'estremità di  $CD$ : ora  $CD$  è 'l primo asse dell'iperbole oonjugate,  $AB$  il secondo, e le rette  $HR$ ,  $SL$ , che passano pel vertice delle stesse, sono uguali e parallele ad  $AB$ , e in oltre son divise per mezzo in  $C$  e  $D$ , siccome  $AB$  lo è in  $O$ ; onde, se dal centro  $O$  tiransi  $Yy$ ,  $Tt$ , che passano per l'estremità  $R$ ,  $L$ ,  $S$ ,  $H$  di dette linee, le rette  $Yy$ ,  $Tt$  faranno gli affintoti delle conjugate ( N. 801. ) : ma elle son pure gli affintoti dell'opposte, perchè passano per l'estremità delle rette  $RS$ ,  $HL$ ; dunque, ec.

823. COROLLARIO I. *La potenza dell'iperbole conjugato è la stessa che quella dell'opposte.*

Tiro le linee  $AG$ ,  $CB$ ,  $BD$ ,  $DA$ . Queste faranno fra loro uguali, a motivo de' termini  $A$ ,  $B$  dell'asse  $AB$  equidistanti da' termini  $C$ ,  $D$  dell'asse  $CD$ , e faranno in oltre divise ciascuna per mezzo dagli affintoti, e  $BV$  sarà uguale a  $VD$ : ora  $\overline{BV}^2$  è la potenza dell'iperbole opposte ( N. 812. ), e  $\overline{DV}^2$  quella delle conjugate; dunque, ec.

824. COROLLARIO II. *Circa l'iperbole conjugate non dicasi nè più nè meno di quello s'è detto circa l'opposte.*

Ciò non ha bisogno di dimostrazione.

825. AVVERTIMENTO. Quindi chiaramente si scorge, onde avvenga, che nell'iperbola la proprietà dell'ordinate al secondo asse non è la stessa che quella dell'ordinate al primo; imperocchè egli s'è già veduto, che 'l quadro d'un'ordinata  $Ff$  al primo asse  $AB$  è al rettangolo  $FB \times AF$ , o al quadrato  $\overline{OF}^2$  della sua distanza al centro, meno il quadro  $\overline{OB}^2$  del primo semiasse, come il quadrato del secondo asse  $CD$  è a quello del primo  $AB$  ( N. 770. ), e ch' all'opposto, il quadro  $f_m$  d'un'ordinata al secondo asse  $CD$  è al quadrato della sua distanza  $MO$  al centro, più 'l quadro  $\overline{OD}^2$  del secondo semiasse, come il quadrato del primo asse  $AB$  è a quello del secondo ( N. 773. ); il ch'è ben diverso. Ma s'egli si restituisce quell'ordinata  $f_m$  nel suo vero sito, cioè nell'iperbola

bola conjugata , prolungando  $Ff$  fin che tagli la conjugata in  $N$ , e poscia tirando l'ordinata  $Nd$ , che sarà uguale ad  $fm$ , troveremo, che'l quadro di detta ordinata è al rettangolo  $dD \times CD$ , ovvero

a  $\overline{Od} - OD$ , come  $\overline{BA}$  a  $\overline{CD}$ ; e per conseguente la proprietà dell'ordinata  $Nd$  al second'asse  $CD$  dell'iperbola  $PBQ$  sarà simile alla proprietà dell'ordinata  $Ff$  al primo asse della stessa.

826. COROLLARIO III. *Tutti i primi diametri dell'iperbole opposte  $PBQ$ ,  $ZAX$  ( Fig. 514. ) sono secondi diametri delle conjugate, e tutti i primi diametri dell'iperbole conjugate sono secondi diametri dell'opposte.*

Già s'è detto, ch' i primi diametri d'un'iperbola son quei, che la segano, e i secondi quelli, che non la segano, e che tanto gli uni quanto gli altri passar debbono pel centro  $O$ . Ciò posto, qualunque diametro  $Vu$  dell'iperbole opposte passar dee per gli angoli  $YOT$ ,  $IOI$  degli assintoti, ch' abbracciano quest' iperbole, perchè altrimenti è manifesto, ch'ei non le segherebbe; onde questo diametro non passa gli angoli  $TOV$ ,  $IOI$ , ch'abbracciano l'iperbole conjugate, ed in conseguenza non li sega; però  $Vu$  è un secondo diametro dell' iperbole conjugate. Si proverà nello stesso modo, la retta  $Ff$ , la qual'è un primo diametro delle conjugate, essere un secondo dell'opposte.

827. COROLLARIO IV. *Se dall'estremità d'un primo diametro  $Vu$  ( Fig. 514. ) si tirino due iperbole opposte, o di due iperbole conjugate tiransi delle tangenti  $Yb$ ,  $In$ , che terminino agli assintoti, dette due tangenti son'uguali.*

Tiro l'ordinate  $ux$ ,  $VD$  al primo asse, e a motivo di  $uO = VO$  ( N. 776. ) i triangoli simili  $uOx$ ,  $VOd$  son perfettamente uguali, ed  $xO = dO$ : ora, per ritrovare i punti  $g$ ,  $G$ , in cui le tangenti segano'l primo asse, convien fare  $x : xO :: BO : Og$ , e  $dO : AO :: OG$ ; e in queste due proporzioni i primi due termini  $xO$ ,  $BO$  d'una parte son'uguali ciascuno a ciascuno ai primi due  $dO$ ,  $AO$  dell'altra; onde il terzo  $Og$  è uguale al terzo  $OG$ : così i due triangoli  $gOu$ ,  $GOV$  son' uguali, perchè hanno i lati  $gO$ ,  $Ou$  uguali ciascuno a ciascuno a'lati  $GO$ ,  $OV$ , e l'angolo compreso  $gOu$  uguale all'angolo compreso  $GOV$ , per essere questi due angoli opposti al vertice; dunque  $ug = VG$ : parimente, uguali essendo i triangoli simili  $gbO$ ,  $GnO$  a motivo di  $gO = GO$ , noi abbiamo  $gb = Gn$ ; quindi  $ug + gb = VG + Gn$ , ovvero  $ub = Vn$ . Ma  $Yb = ub$  ( N. 818. ), ed  $In = Vn$ ; però  $Yb = In$ , e a cagione de' triangoli uguali e simili  $gOu$ ,  $GOV$ ,

Tomo II.

Ff

l'an-

l'angolo  $g^{\circ}O$  equivale al suo alterno  $G^{\circ}VO$ , e le tangenti son parallele.

Si proverà nella stessa guisa, che le tangenti condotte all'estremità d'un primo diametro dell'iperbole conjugate e terminate fra gli assintoti son' uguali, e parallele.

828. PROPOSIZIONE CLXVIII. *Dato un primo diametro VP dell'iperbole opposte ( Fig. 515. ) colle sue due tangenti YN, IG terminate agli assintoti, dico; che se dall'uno de' punti del contatto P tiransi due rette PS, PX parallele agli assintoti, e che terminano all'iperbole conjugate, ognuna d'esse sarà divisa per mezzo dagli assintoti ne' punti H, E.*

Nell'iperbola B il rettangolo  $PH \times HO$  equivale alla sua potenza ( N. 812. ), e per la stessa ragione, nell'iperbola C il rettangolo  $SH \times HO$  è uguale alla sua: ora le potenze di queste due iperbole son' uguali ( N. 823. ); dunque  $PH \times HO = SH \times HO$ ; ed in conseguenza, a motivo dell'altezza comune HO, noi avremo  $PH = SH$ .

Si dimostrerà nella stessa guisa, che PX è divisa per mezzo in E.

829. COROLLARIO I<sup>o</sup>. *Poste le medesime cose, se dal punto S pel centro tirasi 'l diametro SX, ci sarà uguale e parallelo all'una, o all'altra delle tangenti YN, IG del diametro PV.*

A motivo della tangente YN divisa per mezzo in P ( N. 818. ), e di PH parallela ad ON, noi abbiamo nel triangolo YON la base ON doppia di HP, siccome YN lo è d'YP: ora  $HS = HP$  ( N. 828. ); dunque  $SP = 2HP = ON$ ; e per conseguente, a motivo di SP parallela ad ON, noi avremo SO uguale e parallela a PN, e'l doppio di SO, cioè 'l diametro SX uguale al doppio di PN, cioè alla tangente YN.

NOTA. Qualunque tangente YN, compresa fra gli assintoti, è uguale e parallela al diametro conjugato SX del suo diametro PV.

830. COROLLARIO II. *Poste ancora le medesime cose, se dall'estremità delle tangenti YN, IG tiransi le rette YG, NI, ciascuna di loro sarà uguale e parallela al diametro VP, e toccherà l'iperbole conjugate all'estremità S, X del diametro SX.*

Ognuna d'esse sarà uguale e parallela al diametro VP; poichè le tangenti YN, GI son parallele ed uguali fra loro e al diametro SX, e perchè in oltre il diametro VP divide per mezzo queste tangenti, e 'l diametro. Dall'altra parte, le stesse rette YG, NI saranno tangenti in S ed X; poi-

poichè passeranno per detti punti , e perchè saran divise in due parti uguali , per essere il diametro SX equidistante dalle due tangenti YN , IG : ora non possono dette linee esser segate per mezzo in S ed X , quando non sieno tangenti in essi punti ; perocchè , se segassero l'iperbole in due punti , ciascuna di loro avrebbe una parte entro le curve , e due , fra la curva e gli assintoti , uguali fra se , ciò che impedirebbe , che l'una delle parti comprese fra la curva e gli assintoti fosse uguale all'altra due ; onde necessariamente queste rette YG , NI esser debbono tangenti in S , ed X .

831. DIFFINIZIONE . Due diametri VP , SX ( Fig. 515. ) diconsi *Diametri conjugati* , quando sono reciprocamente paralleli alle lor tangenti , cioè quando 'l diametro VP è parallelo alle tangenti YG , NI del diametro SX , e 'l diametro SX alle tangenti YN , IG del diametro PV .

832. COROLLARIO III. Il parallelogrammo di due diametri conjugati qualunque VP , SX ( Fig. 516. ) , cioè 'l parallelogrammo YNIG , formato dalle lor tangenti , equivale al rettangolo de' due assi , cioè al rettangolo HTRQ formato dalle tangenti di detti assi .

Il triangolo ONY , formato dalla tangente YN del diametro PV cogli assintoti , equivale al triangolo QOR formato cogli stessi assintoti dalla tangente QR dell'asse AB ( N. 819. ) : ora 'l triangolo ONY è 'l quarto del parallelogrammo YNIG , e 'l triangolo QOR è 'l quarto del rettangolo HTRQ ; dunque 'l parallelogrammo e 'l rettangolo son' uguali .

833. COROLLARIO IV. Tutti i parallelogrammi de' diametri conjugati sono fra loro uguali .

Ciascun d'essi equivale al rettangolo degli assi . Dunque , ec.

834. COROLLARIO V. La differenza de' quadrati di due diametri conjugati qualunque equivale alla differenza dei quadrati de' due assi dell'iperbola .

Sia un semidiametro qualunque OR ( Fig. 517. ) , il primo semiasse OB , e la tangente PQ al vertice B , ch' equivale al secondo asse ( N. 801. ) ; così QB sarà la metà di questo second' asse . Conduco in R la tangente YN uguale al diametro conjugato del semidiametro RO ( N. 829. ) ; e quindi YR è la metà di esso diametro conjugato . Da' punti R , B , P , N tiro delle rette RS , BV , PM , NH perpendicolari all'assintoto OY . Però il quadro di OR equivale al quadrato di OS , più quello di RS , a motivo del trian-

F.f. 2

golo

golo rettangolo OSR; e per la stessa ragione il quadro d'YR equivale al quadrato d'YS, più quello di SR; e d'ambè le parti togliendo l'quadrato di SR, la differenza dei quadri de' semidiametri conjugati OR, YR sarà la stessa di quella de' quadri  $\overline{SO}$ ,  $\overline{YS}$ : ora, a cagione d'YN divisa per mezzo in R ( N. 818. ), e di SR parallela ad NH, noi abbiamo  $YS = SH$ ; dunque la differenza de' quadri  $\overline{SO}$ ,  $\overline{YS}$  è simile a quella de' quadrati  $\overline{SO}$ ,  $\overline{SH}$ : ma  $\overline{SO} = \overline{OH} + 2OH \times SH + \overline{SH}$  ( N. 140. ); onde la differenza de' quadri  $\overline{SO}$ ,  $\overline{SH}$  è  $\overline{OH} + 2SH \times OH$ , ovvero  $\overline{OH} + YH \times OH$ , o finalmente  $YO \times OH$ ; e questa differenza è la stessa di quella dei quadri de' semidiametri conjugati  $\overline{OR}$ ,  $\overline{YR}$ .

Così pure, noi abbiamo  $\overline{OB} = \overline{OV} + \overline{VB}$ , a cagione del triangolo rettangolo OVB, e  $\overline{QB} = \overline{QV} + \overline{VB}$ , a cagione del triangolo rettangolo QVB; e d'ambè le parti sottraendo il quadro  $\overline{VB}$ , la differenza de' quadrati  $\overline{OB}$ ,  $\overline{QB}$  del primo asse e del secondo semiasse sarà la stessa di quella de' quadrati  $\overline{OV}$ ,  $\overline{VQ}$ : ora, a motivo di QP divisa per mezzo in B, e delle parallele BV, PM, noi abbiamo  $QV = VM$ ; dunque la differenza de' quadrati  $\overline{QV}$ ,  $\overline{VO}$  è la stessa di quella de' quadri  $\overline{VM}$ ,  $\overline{VO}$ : ma  $\overline{VO} = \overline{MO} + 2VM \times MO + \overline{VM}$ ; però la differenza de' quadri  $\overline{VM}$ ,  $\overline{VO}$  è  $2VM \times MO + \overline{MO}$ , ovvero  $MQ \times MO + \overline{MO}$ , o finalmente  $OQ \times MO$ ; e questa differenza è simile a quella dei quadrati  $\overline{OB}$ ,  $\overline{BQ}$  dei due semiasfi.

Quindi egli ci resta a far vedere, che la differenza  $YO \times OH$  dei quadri  $\overline{OR}$ ,  $\overline{RY}$  de' due semidiametri conjugati equivale alla differenza  $OQ \times MO$  de' quadri  $\overline{OB}$ ,  $\overline{BQ}$  de' semiasfi. I triangoli simili OHN, OMP ci danno  $OH : HN :: OM : MP$ ; onde moltiplicando i primi due termini per OY, e gli altri due per QO, avremo  $OH \times OY : HN \times OY :: QO \times OM : QO \times MP$ , ovvero  $OH \times OY : QO \times OM :: HN \times OY : QO \times MP$  ora

ora  $HN \times OY$  è l' doppio del triangolo  $YON$ , per essere  $HN$  la perpendicolare tirata dal suo vertice  $N$  sopra la base  $OY$ ; e perciò anche  $QO \times MP$  è l' doppio del triangolo  $QOP$ , e questi due triangoli son nella stessa ragione de' loro doppi; dunque  $OH \times OY$ .  $QO \times OM :: YON$ .  $QOP$ : ma  $YON = QOP$  ( *N. 819.* ); onde  $OH \times OY = QO \times OM$ , cioè la differenza dei quadri  $\overrightarrow{OR}$ ,  $\overrightarrow{RY}$  de' due semidiametri conjugati è la medesima di quella

de' quadri  $\overrightarrow{OB}$ ,  $\overrightarrow{QB}$  de' due semiaffi; e però la differenza dei quadri de' diametri conjugati è simile a quella de' quadri de' due affi.

835. PROPOSIZIONE CLXIX. Il quadro di qualsivoglia ordinata  $RS$  ad un diametro  $VP$  ( *Fig. 518.* ) è al rettangolo  $PS \times SV$  della sua affissa pel diametro prolungato fino all'ordinata, come il quadro del diametro  $EF$  conjugato del diametro  $VP$  è al quadro del diametro  $VP$ .

Al vertice  $P$  del diametro  $VP$  tiro gli assintoti e la tangente  $HL$  uguale al diametro  $EF$  ( *N. 829.* ), ed' ambe le parti prolungo l'ordinata  $RS$  fino agli assintoti in  $M$  ed  $N$ . I triangoli simili  $MSO$ ,  $HPO$  ci danno  $MS \cdot HP :: SO \cdot PO$ ; dunque  $\overrightarrow{MS} \cdot \overrightarrow{HP} :: \overrightarrow{SO} \cdot \overrightarrow{PO}$ , ed  $\overrightarrow{MS} - \overrightarrow{HP} \cdot \overrightarrow{HP} :: \overrightarrow{SO} - \overrightarrow{PO} \cdot \overrightarrow{PO}$ .

Ora, a motivo di  $\overrightarrow{HP} = \overrightarrow{MR} \times \overrightarrow{RN}$  ( *N. 817.* ), noi abbiamo  $\overrightarrow{MS} - \overrightarrow{HP} = \overrightarrow{MS} - \overrightarrow{MR} \times \overrightarrow{RN}$ , e a motivo di  $MN$  diviso in due parti uguali in  $S$  e disuguali in  $R$ , abbiamo  $\overrightarrow{MS} - \overrightarrow{MR} \times \overrightarrow{RN} = \overrightarrow{RS}$ ; quindi  $\overrightarrow{RS} \cdot \overrightarrow{HP} :: \overrightarrow{SO} - \overrightarrow{PO} \cdot \overrightarrow{PO}$ , ovvero  $\overrightarrow{RS} \cdot \overrightarrow{SO} - \overrightarrow{PO} :: \overrightarrow{HP} \cdot \overrightarrow{PO}$ . Ma  $\overrightarrow{SO} - \overrightarrow{PO} = \overrightarrow{SP} \times \overrightarrow{SV}$  ( *N. 148.* ); onde  $\overrightarrow{RS} \cdot \overrightarrow{SP} \times \overrightarrow{SV} :: \overrightarrow{HP} \cdot \overrightarrow{PO}$ , ovvero  $\overrightarrow{EO} \cdot \overrightarrow{PO} :: \overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{VP}$ .

836. COROLLARIO I°. Il quadro d' un' ordinata  $RL$  al diametro  $EF$  conjugato del primo  $PV$  è al quadro  $\overrightarrow{LO}$  più l' quadrato  $\overrightarrow{EO}$ , come il quadro del diametro  $PV$  è a quello del diametro  $EF$ .

Ciò si dimostra nella stessa maniera che s' è fatto rispetto all' ordinata al second' affe ( *N. 773.* ).

837. DIFFINIZIONE. Dati due diametri conjugati  $PV$ ,  $EF$  ( *Fig. 518.* ), la terza proporzionale al primo e secondo si è l' *pa-*  
*ra-*

parametro del primo, e la terza proporzionale al secondo e primo si è'l parametro del secondo.

838. COROLLARIO II. Il quadro d'un'ordinata RS ad un primo diametro VP è al rettangolo SP  $\times$  SV, come'l parametro di esso diametro è al diametro stesso; e'l quadro d'un'ordinata RL al secondo diametro EF conjugato di VP è al quadro  $\overline{LO}$ , più'l quadro  $\overline{EO}$ , come il parametro di questo secondo diametro è allo stesso secondo diametro.

Ciò si dimostra nella stessa maniera che s'è fatto rispetto ai due assi ( N. 771. 774. ).

839. PROPOSIZIONE CLXX. Dato un primo diametro PV ( Fig. 519. ) colle sue tangenti PX, VL e col suo diametro conjugato EF, se da qualsivoglia punto preso sopra la curva tirasi un'ordinata MR al diametro PV, e una tangente MX, che segnerà le tangenti LV, PX e'l diametro conjugato EF, dico 1°. Che la retta PR, cioè'l diametro VP prolungato fino all'ordinata è diviso armonicamente ne' punti P, S, V. 2°. Che'l rettangolo MR  $\times$  OH dell'ordinata MR per la parte OH del diametro conjugato segato dalla tangente MX equivale al quadro  $\overline{OF}$  della metà dell'asse conjugato EF. 3°. Che'l rettangolo LV  $\times$  PX delle parti LV, PX delle tangenti del diametro PV segato dalla tangente MX è altresì uguale al quadro  $\overline{OF}$  della metà dell'asse conjugato.

A motivo dell'ordinata MR condotta dal punto del contatto M noi abbiamo OR. OV : : OV. OS : ora la linea OP aggiunta alla retta OR è uguale alla media proporzionale OV; dunque RV. VS : : RP. PS ( N. 753. ); il che dovea 1°. dimostrarli.

Convien'osservare, che si ha pure RV. RS : : RO. RP, siccome fu avvertito nel luogo testè citato ( N. 753. ).

I triangoli simili MSR, HSO ci danno SR. SO : : MR. OH; e moltiplicando i primi due termini per OR e gli altri due per MR, avremo SR  $\times$  OR. SO  $\times$  OR : : MR. OH  $\times$  MR : ora, a motivo di RV. RS : : RO. RP, abbiamo SR  $\times$  OR = RV  $\times$  RP, e a cagione di : : OR. OV. OS, abbiamo OR  $\times$  OS =  $\overline{OV}$ ; dunque RV  $\times$  RP.  $\overline{OV}$  : : MR. OH  $\times$  MR. od MR. RV  $\times$  RP : : OH  $\times$  MR.  $\overline{OV}$  : ma per la proprietà dell'iperbo-

1a,  $\overline{MR} \cdot RV \times RP :: \overline{OF} \cdot \overline{OV}$  ( N.835. ) ; onde  $OH \times MR \cdot \overline{OV} :: \overline{OF} \cdot \overline{OV}$ , ed in conseguenza  $OH \times MR = \overline{OF}$ ; il che dovea 2°. dimostrarsi.

A cagione di ::  $OR \cdot OV \cdot OS$ , noi abbiamo  $\overline{OR} - OV \cdot OS :: OV - OS \cdot OS$ , cioè  $RV \cdot SV :: OV$ , ovvero  $OP \cdot OS :: dunque RV + SV \cdot SV :: OP + OS \cdot OS$ , cioè  $SR \cdot SV :: PS \cdot OS$ ; ora, per i triangoli simili  $MSR$ ,  $LSV$ , abbiamo  $SR \cdot SV :: MR \cdot LV$ , e per i triangoli simili  $PSX$ ,  $OSH$ , abbiamo  $PS \cdot OS :: PX \cdot OH$ ; onde  $MR \cdot LV :: PX \cdot OH$ , e quindi io deduco  $MR \times OH = LV \times PX$ ; ma  $MR \times OH = \overline{OF}$ ; però anche  $LV \times PX = \overline{OF}$ ; il che dovea 3°. dimostrarsi.

840. PROPOSIZIONE CLXXI. *Se data una tangente TPM*

( Fig. 520. ) intorno'l primo asse  $AB$  descrivessi un circolo  $ARBH$ , e che da' punti  $R$ ,  $H$ , in cui la tangente  $TM$  sega il circolo, s' alzino sopra detta tangente delle perpendicolari  $IZ$ ,  $HX$ , elle passeranno per i fuochi  $X$ ,  $Z$  dell' iperbole opposte.

Le parti  $IR$ ,  $LH$  delle perpendicolari  $IZ$ ,  $HX$  son due corde del circolo uguali, e perciò equidistanti dal centro  $O$  ( N. 265. ); quindi è, che se dal detto centro io tiro la retta  $FV$  perpendicolare ad esse corde, avrò  $FO = OV$ : così, simili essendo ed uguali i triangoli rettangoli  $OVX$ ,  $OFZ$ , ho  $FZ = VX$ ; e da una parte togliendo  $FR$  metà della corda  $IR$ , e dall' altra  $VL$  metà della corda  $HL$ , si ha  $RZ = LX$ . Ciò posto.

Tiro in  $A$  e  $B$  le tangenti  $AM$ ,  $BN$ , che seghino in  $M$  ed  $N$  la tangente  $TM$ . I triangoli rettangoli  $PHX$ ,  $PAM$  son simili, a motivo dell'angolo acuto  $HPX$ , ch'è loro comune; dunque  $PH \cdot HX :: PA \cdot AM$ . Similmente, a motivo de' triangoli simili  $PRZ$ ,  $PBN$ , abbiamo  $PR \cdot RZ :: PB \cdot BN$ ; però moltiplicando insieme queste due proporzioni, si ha  $PH \times PR \cdot HX \times RZ :: PA \times PB \cdot AM \times BN$ : ma segandosi le corde  $AB$ ,  $RH$  in  $P$ , abbiamo  $PH \times PR = PA \times PB$  ( N. 279. ); quindi  $HX \times RZ = AM \times BN$ : ora  $AM \times BN = \overline{OD}$  ( N. 839. ); onde  $HX \times RZ = \overline{OD}$ , o poichè  $RZ = XL$ , avremo  $HX \times LX = \overline{OD}$ : ma  $XH$ ,  $XB$ , essendo secanti del circolo, ci danno  $XA \times XB = HX \times XL$  ( N. 273. ); dunque  $XA \times XB = \overline{OD}$ , e però il



il punto X è l'uno de' fuochi ( N. 784. ): così pure, a cagione di  $IZ = HX$ , e di  $RZ = XL$ , avremo  $IZ \times ZR = HX \times LX = \overline{OD}$ : ora le secanti ZI, ZA ci danno  $ZB \times ZA = IZ \times ZR$ ; onde  $ZB \times ZA = \overline{OD}$ , e in conseguenza il punto Z è l'altro fuoco ( N. 784. ).

841. COROLLARIO I°. *Se da qualsivoglia punto T preso sopra l'una dell' iperbole opposte ( Fig. 521. ) tirasi una tangente TM e delle rette TZ, TX ai due fuochi, gli angoli ZTM, XTM, formati da queste due rette e dalla tangente TM, son' uguali.*

Tiro l'ordinata TS al primo asse, e l'ordinata PE nel circolo: così, a motivo di  $SO, BO :: BO. PO$  ( N. 777. ), la tangente SE al circolo tirata dal punto S toccherà in E ( N. 292. ); e siccome TS è perpendicolare ad AS in S, e la retta TH, che parte dall'uno de' punti di TS, passa pel punto P, in cui l'ordinata EP del circolo condotta dal punto del contatto sega'l diametro AB di detto circolo, n'avviene, esser la stessa TH divis'armonicamente in R, P ( N. 302. ); e noi abbiamo  $TR. RP :: TH. PH$ , ovvero  $TR. TH :: RP. PH$ : ma da' punti R, H tirando le perpendicolari IZ, XH a TH, i triangoli simili PRZ, PHX ci danno  $RP. PH :: RZ. HX$ ; dunque  $TR. TH :: RZ. HX$ ; donde ne segue, che i due triangoli rettangoli TRZ, THX son simili, perchè hanno i lati TR, RZ intorno l'angolo rettonel primo proporzionali a' lati TH, HX intorno l'angolo retto nel secondo, e per conseguenza l'angolo ZTR equivale all'angolo XTH.

842. COROLLARIO II. *Poste le stesse cose, la differenza delle linee XT, TZ, tirate da' due fuochi al punto del contatto T, è uguale al primo asse BA.*

Dal centro O al punto R conduco la retta OR, ch'è in conseguenza uguale alla metà del primo asse AB: ora, a cagione degli angoli uguali XTR, ZTR ( N. 841. ) e della retta TR perpendicolare per la costruzione a ZI, uguali sono i triangoli rettangoli FTR, ZTR, che han l'altezza comune TR, e noi abbiamo  $FR = RZ$ , e  $TZ = TF$ ; così XF è la differenza delle due linee XT, TZ tirate dal punto T ai fuochi: ma a motivo d'XZ divis' per mezzo in O, e di FZ divis' per mezzo in R, i triangoli simili ZFX, ZRO ci danno FX doppio di RO; dunque  $FR = 2RO = AB$ .

843. PROPOSIZIONE CLXXII. *Il minore di tutt' i primidiametri d' una, o due iperbole opposte ( Fig. 522. ), tirate da una stessa*

*Stessa parte BS dell'una dell'iperbole, si è l' primo asse AB, e gli altri son tanto maggiori, quanto più da esso s' allontanano. Così ancora, il minore di tutt' i secondi diametri è l' secondo asse CD, e gli altri sono tanto maggiori, quanto più s' allontanan dal medesimo.*

Nell'iperbola B tiro più ordinate TM, SN al primo asse, e da' loro termini T, S conduco de' diametri TP, SR. Nel triangolo rettangolo OTM noi abbiamo  $\overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{TM}$ , e'l triangolo rettangolo OSN ci dà  $\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{SN}$ : ora  $\overrightarrow{ON}$  è maggiore di  $\overrightarrow{OM}$ , per essere l'ordinata SN più distante dal centro O che l'ordinata TM, e per la stessa ragione anche  $\overrightarrow{SN}$  è maggior di  $\overrightarrow{TM}$ ; dunque  $\overrightarrow{ON} + \overrightarrow{SN}$  è maggiore di  $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{TM}$ , quindi  $\overrightarrow{OS}$  è maggior di  $\overrightarrow{OT}$ , ed OS di OT: così 2OS, od SR è maggiore di 2OT, ovvero TP; cioè'l diametro SR, ch'è più distante dal primo asse, o che con esso forma un'angolo maggiore, è più grande del diametro TP, il quale col medesimo primo asse forma un angolo minore; ed è manifesto, che AB esser dee il minore di tutt' i primi diametri; perocchè' essendo il vertice B dell'iperbola più vicino al centro O che tutti gli altri punti della curva, la retta OB è più corta della linea OT, e per conseguente AB è minor di TP. Lo stesso noi proveremo rispetto a' secondi diametri CD, LV, QX, descrivendo l'iperbole conjugate.

**844. PROPOSIZIONE CLXXIII.** *Se dal centro O (Fig. 523.) con un raggio OH maggior del primo semiasse OB descrivessi un circolo HMPRTV, la circonferenza di detto circolo non segnerà l'iperbola ch' in quattro punti M, R, T, V; e se gli stessi si congiungono colle rette MR, RT, TV, VM, due di esse TR, VM faran delle doppie ordinate al primo asse fra loro uguali, e l' altre due MR, TV faranno delle doppie ordinate al secondo, altresì uguali fra loro.*

1°. Egli è per se evidente, che la circonferenza del circolo dee segar l'iperbola in quattro punti, non potendo l' estremità H del raggio OH descrivere il quarto di circonferenza HP senz' almeno segare la semiperbola BZ in un punto M; il che dee pur succedere rispetto all' altre semiperbole AR, AT, VB. 2°. Il punto H, descrivendo l' quarto della circonferenza HP, non può segar la semiperbola BZ ch' in un punto M; perocchè, se la segasse in due,

Tomo II.

Gg

ti.

tirando da essi due punti al centro  $O$  delle rette, le quali sarebbero uguali, per essere raggi dello stesso circolo, elle sarebbero ancora semidiametri dell'iperbola, e per conseguente i doppi di esse rette, cioè i due diametri sarebbero uguali; donde ne risulterebbe, che da un medesimo lato  $BMZ$  dell'iperbola si potrebbero tirare due diametri uguali, il ch'è impossibile (N. 843.). 3°. Dal punto  $M$ , in cui'l quarto di circolo  $HP$  sega la semiperbola, tiro nel circolo una corda parallela al primo asse; detta corda sarà dunque perpendicolare al secondo, e sarà per conseguente divisa in due parti uguali in  $Q$ , perchè questo second'asse passa pel centro  $O$ : ora la doppia ordinata al second'asse, condotta dal punto  $M$ , è altresì divisa in due parti uguali in  $Q$ ; però la corda del circolo e la doppia ordinata son'uguali, e per conseguenza il punto  $R$ , in cui la corda sega'l circolo, è'l medesimo di quello, in cui'l circolo taglia la semiperbola  $AR$ . Si proverà nello stesso modo, che la corda tirata da  $R$  parallela al secondo asse è uguale alla doppia ordinata  $TR$  condotta dal punto  $R$  al primo; che la corda tirata dal punto  $T$  parallela al primo asse equivale alla doppia ordinata  $TV$  al picciolo asse condotta dallo stesso punto, e finalmente, che la corda tirata dal punto  $V$  parallela al secondo asse è uguale alla doppia ordinata al primo condotta dal medesimo punto  $V$ ; onde, a motivo delle parallele  $TV$ ,  $RM$ , e  $TR$ ,  $VM$ , le due doppie ordinate  $TR$ ,  $VM$  al primo asse son'uguali, non meno che le due  $RM$ ,  $TV$  al secondo.

845. PROPOSIZIONE CLXXIV. *Se sopra'l secondo semiasse  $OD$  prolungato se fia d'uopo (Fig. 524.) pigliasi la parte  $OP$  uguale al primo semiasse  $OB$ , e che quindi portisi la distanza  $PB$  sopra'l primo semiasse prolungato da  $O$  in  $V$ , l'ordinata  $TV$  condotta dal punto  $V$  al primo asse sarà uguale alla metà  $CO$ , ovvero  $OD$  del secondo.*

Nel triangolo rettangolo isoscele  $POB$ , noi abbiamo  $\overline{PB} = \overline{OB}$  +  $\overline{OP} = 2\overline{OB}$ , e per conseguente  $\overline{OV} = 2\overline{OB}$ : ora, per la proprietà della curva,  $\overline{TV} \cdot \overline{VB} \propto \overline{VA}$ , ovvero  $\overline{VO} - \overline{OB} :: \overline{CO} \cdot \overline{OB}$ , ed  $\overline{VO} - \overline{OB} = 2\overline{OB} - \overline{OB} = \overline{OB}$ ; dunque  $\overline{TV} \cdot \overline{OB} :: \overline{CO} \cdot \overline{OB}$ , e però  $\overline{TV} = \overline{CO}$ , e  $TV = CO$ .

846. PROBLEMA. *Data un'iperbola  $XBZ$  (Fig. 525.) trovare i suoi due assi, i suoi fuochi, ed i suoi asintoti, ec.*

Tiro

Tiro più linee parallele MB, NR, ec. terminate d' ambe le parti alla curva; le divido ciascuna in due parti uguali, e per i punti di divisione faccio passare una retta TL, ch'è un diametro. Cerco nello stesso modo un'altro diametro HV, e'l punto O, in cui li due diametri si segano, è'l centro dell'iperbola.

Facendo centro in O, con un'apertura di compasso assai grande, a fine di poter segare l'iperbola, descrivo un'arco di circolo, e da' punti E, I, in cui quest'arco sega la curva, tiro la retta EI doppia ordinata al primo asse ( N. 844. ); onde segando detta linea per mezzo in G, dal centro O tiro la retta OG, che sega l'iperbola in B, e per conseguenza la retta OB è la metà del primo asse. Alzo in O la retta OS uguale e perpendicolare ad OB; prendo la distanza SB, e da O portandola in G, l'ordinata GI condotta dal punto G equivale alla metà OD del secondo (N.845.).

Portata dunque GI da O in D, e da O in C perpendicolare a CD, per avere la posizione del secondo asse CD, tiro le rette CB, DB; e dividendole ciascuna per mezzo ne' punti m, n, dal centro O, e da' punti di divisione m, n tiro le rette indefinite OmL, Onl, che sono gli assintoti ricercati ( N. 802. ).

Finalmente, prendendo CB, ovvero DB, e portandola sopra l'asse prolungato d'ambe le parti da O in X, e da O in x, i punti X, x sono i due fuochi ( N. 783. ).

847. PROBLEMA. *Data una, o due iperbole opposte (Fig.526.) trovare un primo diametro, che colle sue ordinate formi un'angolo uguale a un dato abc.*

Tiro gli assintoti OT, OV; descrivo con un raggio ad arbitrio un circolo MNL, e da qualsivoglia punto M tirando una tangente MZ a detto circolo, faccio in M colla tangente MZ un'angolo ZML uguale all'angolo TOV degli assintoti: così ZML è l'angolo del segmento MIL. Segò per mezzo in X la corda ML, e nell'altro segmento io faccio un'angolo MXN uguale al dato abc. Tiro le corde MN, NL, e porto la prima MN sopra l'assintoto OT da O in E, e l'altra NL sopra l'assintoto OV da O in F; tiro la retta EF, e segandola per mezzo in R, dal centro O tiro la retta OR, e la sua parte OS, compresa fra 'l centro O dell'iperbola e la curva, sarà la metà del diametro cercato. Il che io provo in questo modo.

L'angolo del segmento ZML vale la metà dell'arco MIL: ora anche l'angolo MNL alla circonferenza vale la metà dello stesso arco; dunque  $MNL = ZML$ : ma  $ZML = EOF$ ; onde  $MNL$

Gg 2 = EOF,

$\equiv EOF$ , e però i due triangoli  $MNL$ ,  $EOF$  son'uguali, perchè hanno i lati  $MN$ ,  $NL$  uguali ciascuno a ciascuno a'lati  $EO$ ,  $OF$ , e l'angolo compreso  $MNL$  uguale all'angolo compreso  $EOF$ . Dunque l'angolo  $NML$  equivale all'angolo  $OEF$ , e'l lato  $ML$  al lato  $EF$ ; dal che ne segue, che  $\frac{1}{2}ML$ , od  $MX$  è uguale a  $\frac{1}{2}EF$ , od  $ER$ , e che per conseguenza i triangoli  $MXN$ ,  $ERO$  son'uguali e simili, a motivo de'lati  $MN$ ,  $MX$  uguali ciascuno a ciascuno a'lati  $EO$ ,  $ER$ , e dell'angolo compreso  $NMX$  uguale all'angolo compreso  $OER$ ; però l'angolo  $NXM$  equivale all'angolo  $ORE$ : ora, a cagione di  $EF$  diviso per mezzo in  $R$ , e di  $EP = HE$  ( *N. 815.* ), noi abbiamo  $PR = RH$ ; onde la linea  $OR$  tirata dal centro  $O$  è un diametro, perchè sega  $PH$  in due parti uguali; e questo diametro colla sua doppia ordinata forma un'angolo  $ORP$  uguale all'angolo  $MXN$ , ch' equivale al richiesto *abc*.

848. PROBLEMA. Dato un diametro, o semidiametro  $OR$  ( *Fig. 527.* ) trovar' il suo diametro conjugato.

Tiro gli assintoti  $OX$ ,  $OY$ , e la tangente  $PH$  al vertice  $R$  del dato diametro: ora questa tangente equivale al diametro conjugato, che si cerca ( *N. 829.* ); onde tirando dal centro  $O$  una parallela alla stessa, e facendo  $OT = RH$ , ed  $OL = PR$ , avremo la posizione di detto diametro.

849. PROPOSIZIONE CLXXV. Se dal punto  $T$  preso sopra l'una dell'iperbole opposte ( *Fig. 528.* ) tirasi una retta  $TP$  all'altra iperbola, le parti  $TS$ ,  $RP$  di essa retta, comprese fra le curve e gli assintoti, son'uguali.

Da'punti  $T$ ,  $P$  fra gli assintoti io conduco le rette  $MN$ ,  $HL$  parallele al secondo asse  $CD$ . I triangoli simili  $MTR$ ,  $LPR$  ci danno  $MT : TR :: LP : PR$ , e a cagione de' triangoli simili  $TNS$ ,  $PHS$  noi abbiamo  $TN : TS :: PH : PS$ ; onde moltiplicando insieme i termini di queste due proporzioni, avremo  $MT \times TN = TR \times TS :: LP \times PH = PR \times PS$ ; ma  $MT \times TN = LP \times PH$ , poichè questi due rettangoli son'uguali al quadro della metà  $CD$  del second' asse ( *N. 805.* ); dunque  $TR \times TS = PR \times PS$ , e però  $TR : PR :: PS : TS$ ; quindi componendo,  $TR + PR : PR :: PS + TS : TS$ , ovvero  $TP : PR :: TP : TS$ , ed in conseguenza  $PR = TS$ .

850. COROLLARIO I°. Se fra due iperbole opposte ( *Fig. 529.* ) si, anzi più linee  $TP$ ,  $HL$ , ec. parallele fra loro e al primo asse, o ad un primo diametro  $EF$ , i rettangoli  $TS \times SP$ ,  $HZ \times ZL$  delle parti  $TS$ ,  $HZ$  di queste stesse rette, comprese fra l'una delle curve e l'assin-

## DELLE MATEMATICHE. 237

*l'assintoto più vicino, moltiplicate per i residui SP, ZL di dette linee, sono uguali fra loro, e al quadro della metà OE del diametro a cui queste linee son parallele.*

Da' termini T, P, H, L delle linee TP, HL io tiro fra gli assintoti delle rette MN, *mn*, XV, *xv* parallele al secondo asse. I triangoli simili NTS, VHZ ci danno TN. TS : : HV. HZ, e a motivo de' triangoli simili MTR, XHr abbiamo MT. TR : : XH. Hr; onde moltiplicando insieme queste due proporzioni, avremo TN × MT. TS × TR : : HV × XH. HZ × Hr: ora TN × MT = HV × XH ( N. 817. ); dunque TS × TR = HZ × Hr: ma a motivo di PR = ST e di Lr = HZ ( N. 849. ), noi abbiamo TR = PS, ed LZ = Hr; quindi TS × TR = TS × PS, ed HZ × Hr = HZ × LZ, e perciò i rettangoli TS × PS, HZ × LZ sono fra loro uguali; e siccome quanto le linee TP, HL son più vicine al diametro EF, tanto più le lor parti Zr, RS, ec. comprese fra gli assintoti diminuiscono, così è manifesto, che svanendo questa parte s'avrà EO × OF = TS × PS = HZ × LZ.

851. COROLLARIO II. *Le rette TP, HL tirate parallele ad un primo diametro EF son divise ciascuna per mezzo dal diametro conjugato dello stesso.*

Il diametro conjugato di EF, cioè la retta pq è un primo diametro dell'iperbola conjugata Gg, e l'ordinate Gg, ec. di questo diametro son parallele al diametro EF, ed in conseguenza alle rette TP, ec. onde prolungando Gg fino agli assintoti, la retta AB sarà ancora divisa per mezzo, siccome Gg lo è dal suo diametro pq, e ciò a cagione di aG = bg: ora i triangoli Oba, ORS son simili, e'l diametro pq, che passa pel loro vertice O, divide in mezzo la base ba del triangolo Oba; dunque lo stesso diametro sega pure per mezzo in t la base RS del triangolo ORS. Così ad Rt sommando la parti RP, e alla retta RS la parte ST uguale ad RP, avremo Tt = tP; e però la retta TP è divisa per mezzo in t dal diametro pq conjugato del diametro EF, e così dell'altre.

852. PROBLEMA. *Dati gli assintoti VI, LV ( Fig. 530. ) ed un punto R dell'una dell'iperbole opposte descrivere l'iperbola.*

Colla retta OS divido in due ugualmente l'angolo VOL degli assintoti, detta linea è nella posizione del primo asse. Dal dato punto R fino al concorso dell'assintoto LV in X tiro una retta RX parallela ad OS, e quindi la prolungo fin che XT sia uguale ad NR: così io ho RX + XT uguale al quadro della metà del primo asse ( N. 850. ), essendo manifesto, che T esser dee un punto

punto dell'iperbola opposta a quella, che si cerca; e però prendendo una media proporzionale fra  $RX$  ed  $XT$ , e portandola sopra  $OS$  da  $O$  in  $B$  e da  $O$  in  $A$ , ho'l primo asse  $AB$ .

Dal dato punto  $R$  io conduco fra gli assintoti la retta  $HM$  perpendicolare al primo asse, ed ho  $HR \times RM$  uguale al quadro della metà del secondo ( *N. 805.* ), dovendo questo secondo asse esser parallelo ad  $HM$ . Pigliando dunque una media proporzionale infra  $HR$  ed  $RM$ , e innalzandola perpendicolarmente dall'una e dall'altra parte del grand'asse al centro  $O$ , s'avrà il secondo asse  $CD$ ; e così, ritrovati li due assi, si descriverà l'iperbola come sopra s'è insegnato.

Dopo trovato il primo asse  $AB$  si potrebbe ancora più agevolmente rinvenire il secondo  $CD$ , tirando dal vertice  $B$  la tangente  $PQ$  uguale al second'asse (*N. 801.*); quindi è, che se pel mezzo  $O$  del primo asse  $AB$  tirasi una retta  $CD$  perpendicolare ad  $AB$ , e che sopra vi si pigli la parte  $OC$  uguale a  $PB$ , e la parte  $OD$  uguale a  $BQ$ , s'avrà il secondo asse  $CD$  nella sua posizione.

**FINE DEL TOMO SECONDO.**

TA-

239

# TAVOLA

## DE' CAPITOLI E DE' TITOLI

CONTENUTI IN QUESTO SECONDO VOLUME :

---

*Continuazione del Libro Secondo.*

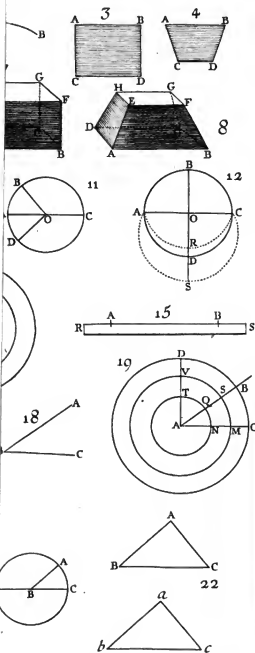
<b>C</b> APITOLO VIII. <i>Della Trigonometria, della Longimetria, e del Livellamento.</i>	Pag. 3
<i>Della Risoluzione de' Triangoli Rettangoli.</i>	7
<i>Della Risoluzione de' Triangoli Obbliquantoli, o non Rettangoli.</i>	9
<i>Della Longimetria.</i>	11
<i>Del Livellamento.</i>	17
<i>Tavola degl' Innalzamenti del Livello apparente.</i>	21
<b>C</b> AP. IX. <i>Della Planimetria, o Misura delle Superficie piane, e del lor rapporto fra esse.</i>	23
<i>Del Cambiamento delle Figure, e della lor riduzione di maggiori in minori, e di minori in maggiori.</i>	37
<i>Della Geodesia, o divisione delle Figure sul Terreno.</i>	46
<i>Delle Figure Ioperimetre.</i>	52
<b>C</b> AP. X. <i>Della Stereometria, o Misura de' Solidi, delle loro superficie, e de' lor rapporti.</i>	61
<i>Delle differenti posizioni delle Linee riguardo a' Piani, e di quelle de' Piani fra loro.</i>	ivi.
<i>Della Misura de' Solidi, e de' lor rapporti.</i>	69
<i>Del cambiamento de' Solidi.</i>	97
<i>Delle Superficie de' Solidi.</i>	101
<i>Di alcuni usi del Compasso di Proporzione necessario per l'Intelligenza di quanto s'è detto nel corso del presente Libro.</i>	111
<b>C</b> AP. XI. <i>Della Misura delle Muraglie, e de' Legni.</i>	113
<i>Della Misura de' Legni da Fabbrica, da Lavoro, ec.</i>	121
<i>Delle Frazioni Decimali.</i>	125
<b>C</b> AP. XII. <i>Delle Sezioni Coniche.</i>	127
<i>Definizioni, e Principj.</i>	ivi.
<i>Della Parabola considerata in un Piano fuori del Cono.</i>	131
<i>Dell' Elisse considerata sopra un Piano fuori del Cono.</i>	159
<i>Dell' Iperbola considerata in un Piano fuori del Cono.</i>	201

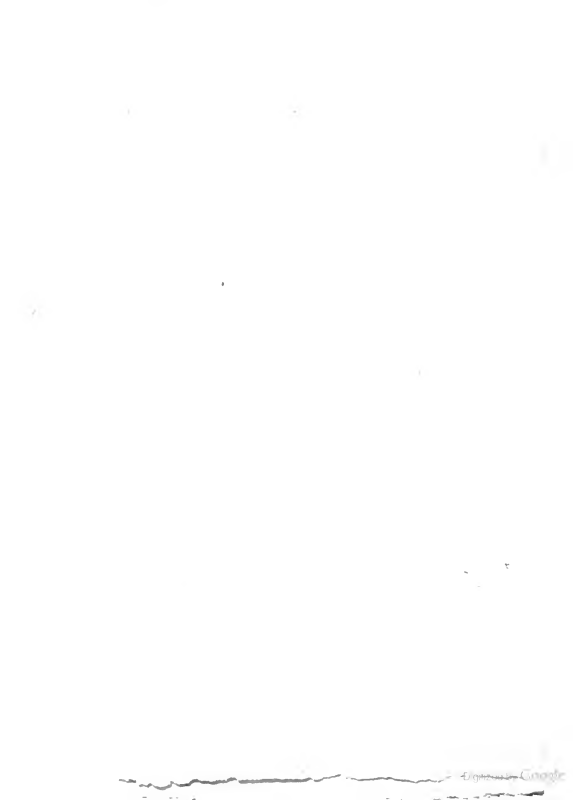


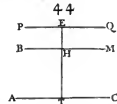
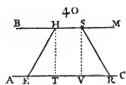
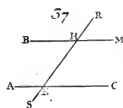
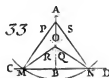
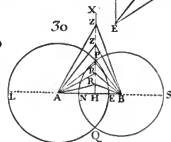
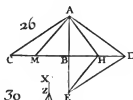
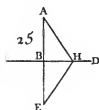
Pag. 16. lin. 26. in cui dove	leg. dove
Pag. 19. lin. 24. correzioni	ieg. le correzioni
Pag. 27. lin. 7. a parte	leg. parte
Pag. 61. lin. 24. può può	leg. non può
Pag. 72. lin. 13. egli	leg. ch'egli
Pag. 95. lin. 6. fessi	leg. fra essi
Pag. 134. lin. 28. NS ;	leg. = NS ;
Pag. 142. lin. 15. farà	leg. avrà
Pag. 194. lin. 10. all' estremità	leg. estremità
Pag. 214. lin. 2. $\overline{OL}$	leg. $\overline{OL}$

5-3-247

Fig. 240





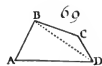
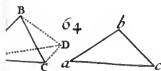
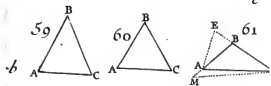
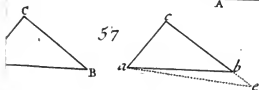
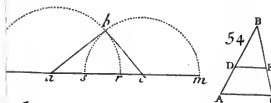
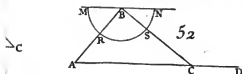
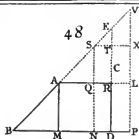
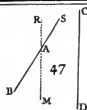




5-3-247

Fig. 240

Tavola





73



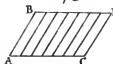
74



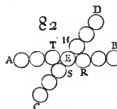
77



78

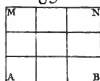


81

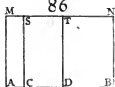


82

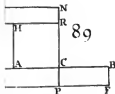
85



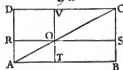
86



89



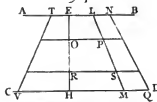
90



93



94

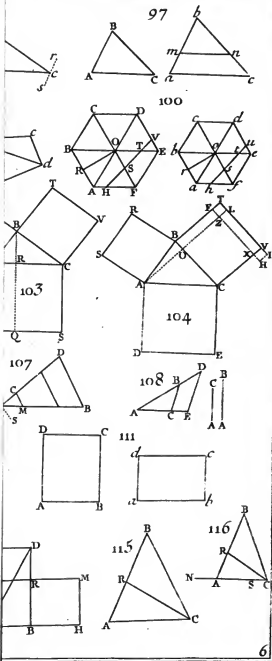






3-3-247

Fig 243

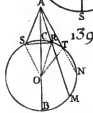
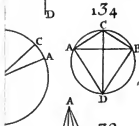
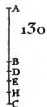
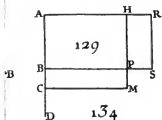
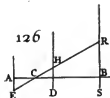
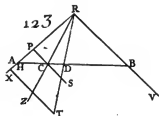
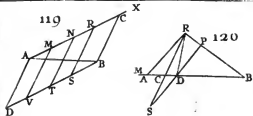


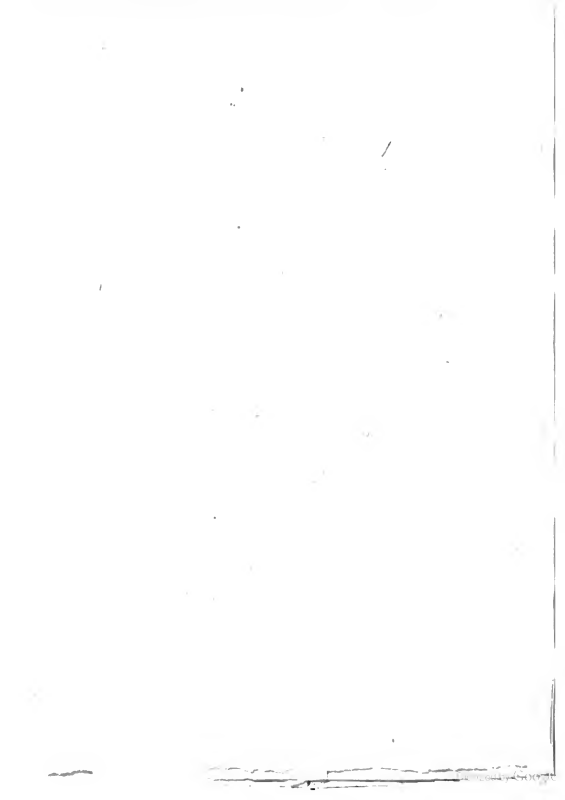


5-3-247

Fig. 240

Table

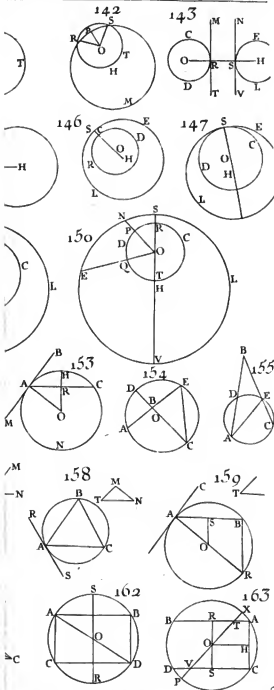




3-3-247

Pg 240

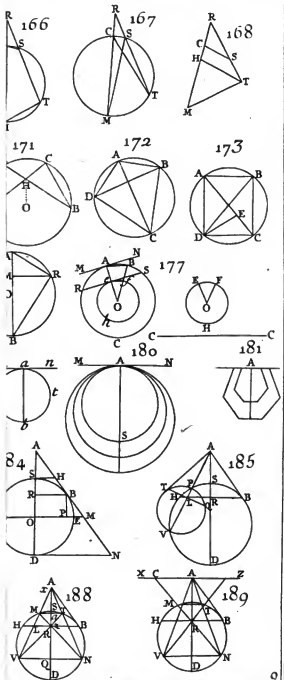
Tavel





5-3-24/1

P. 240

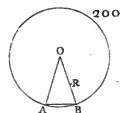
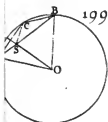
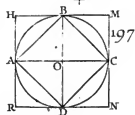
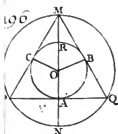
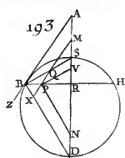
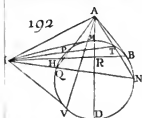






5-3-247

Pg 240





205

206

207

210

211

212

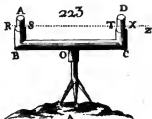
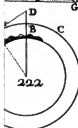
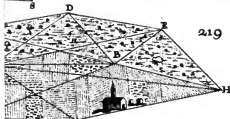
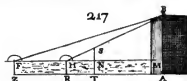
214



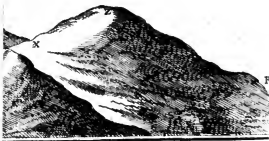


3-247

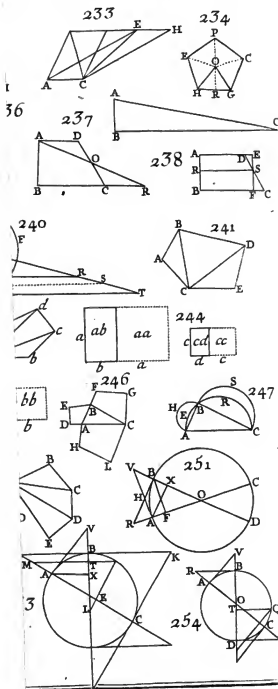
7-240



230

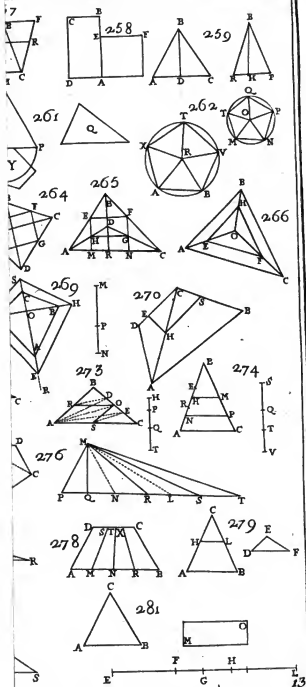










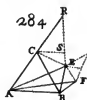




83



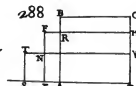
284



285



288



289



292

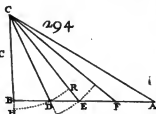


293

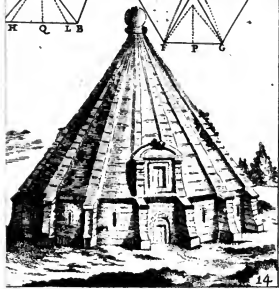
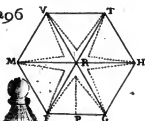


C

294



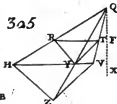
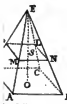
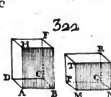
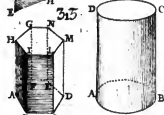
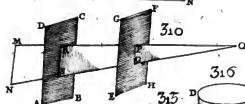
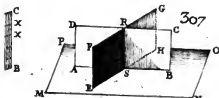
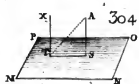
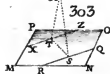
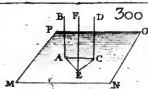
296



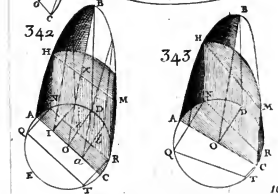
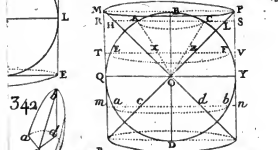
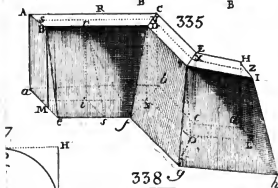
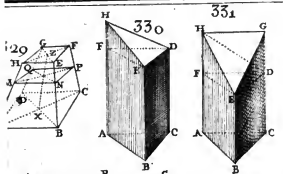


Pg 211

5-3-247

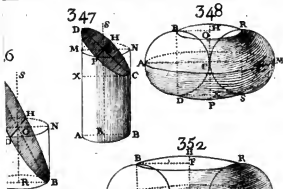




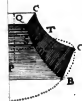




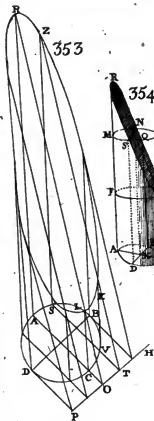




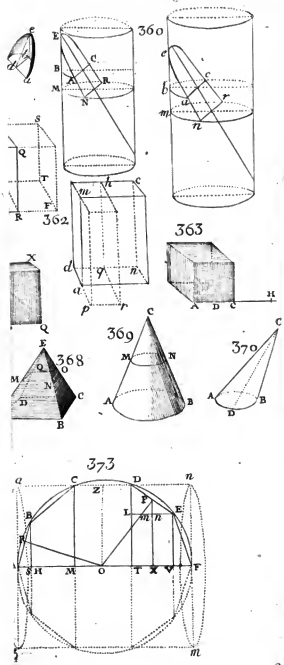
351



357

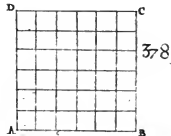
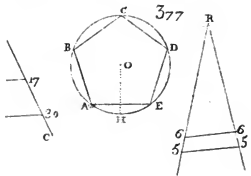




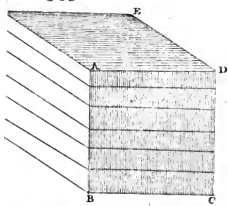




5-3-247

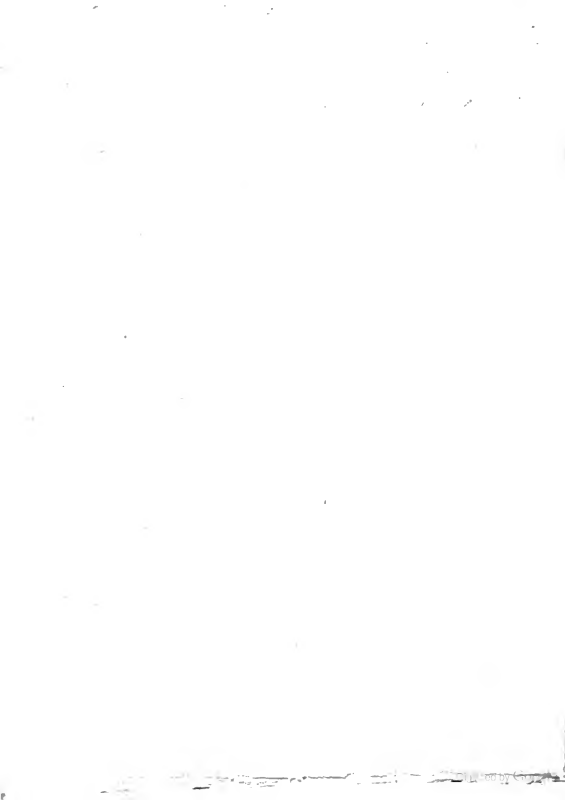


381

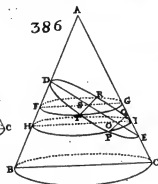
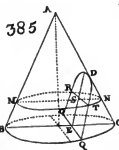


382

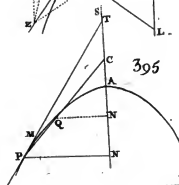
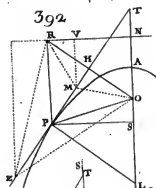
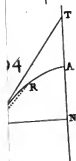
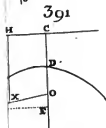
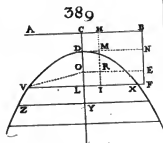
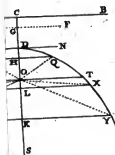




Pg 242  
 53-249

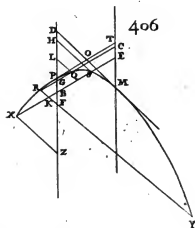
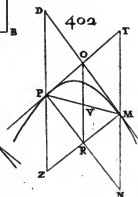
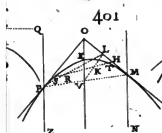
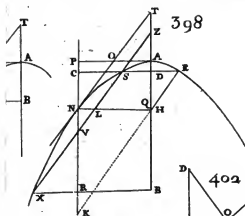


388

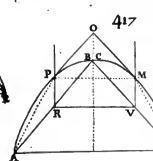
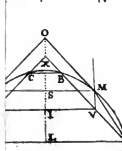
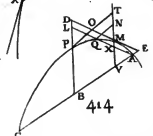
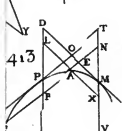
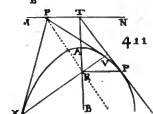
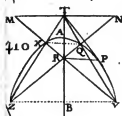
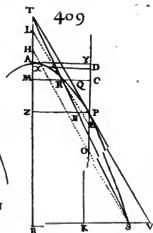
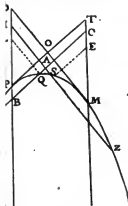


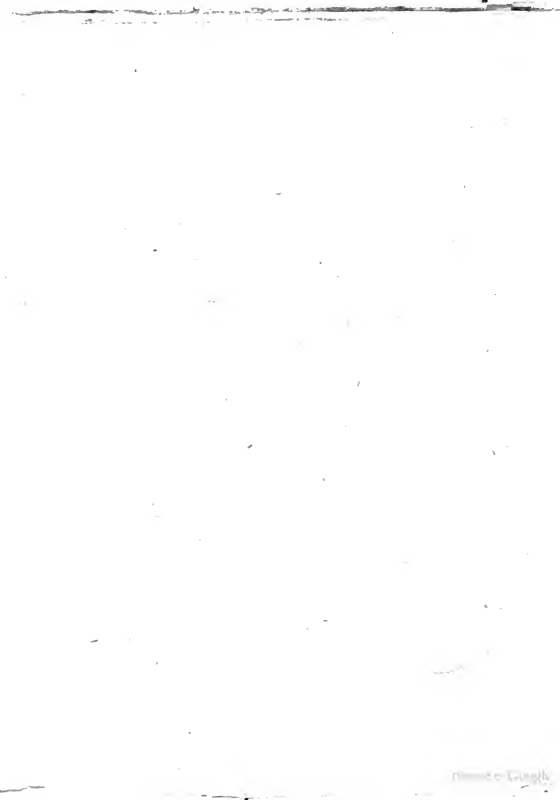


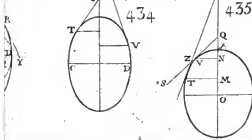
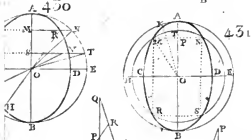
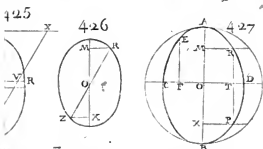
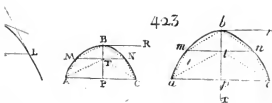
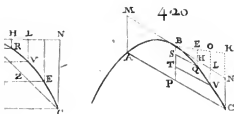


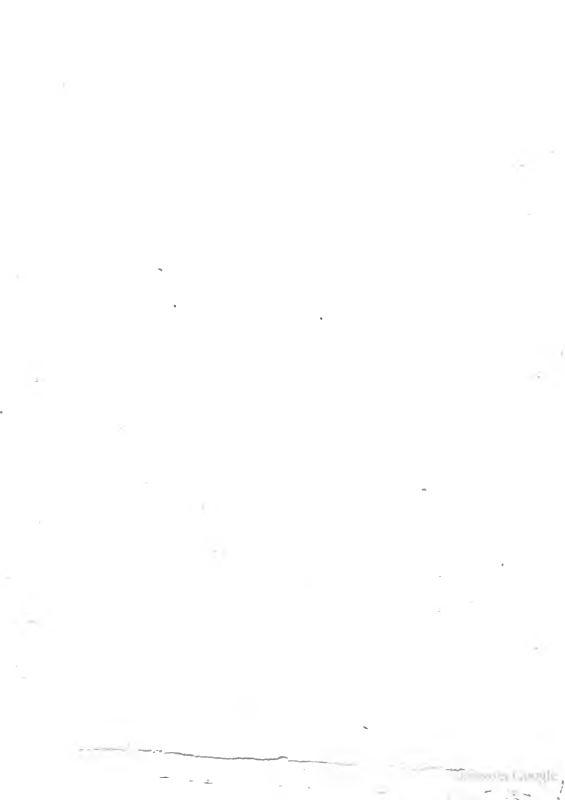




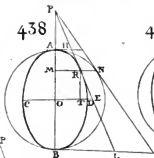




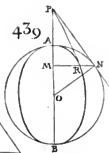




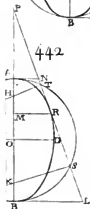
438



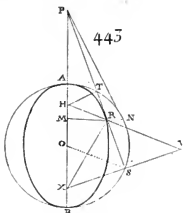
439



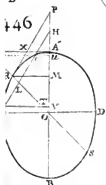
442



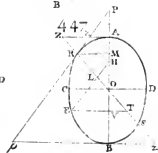
443



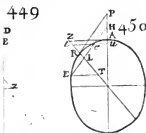
446



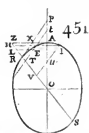
447



449

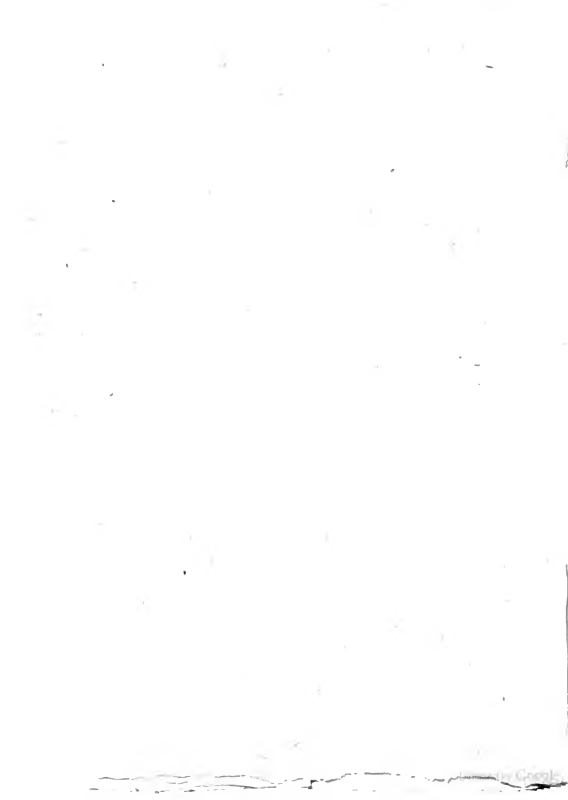


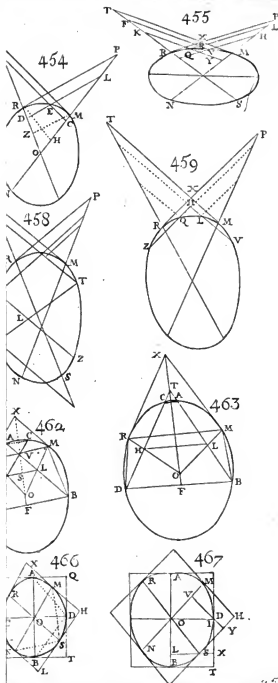
450



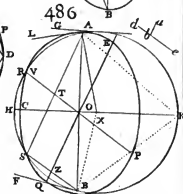
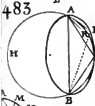
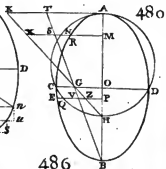
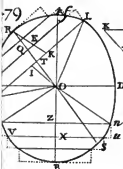
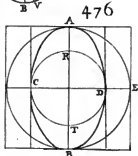
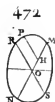
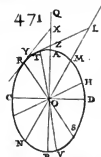
451

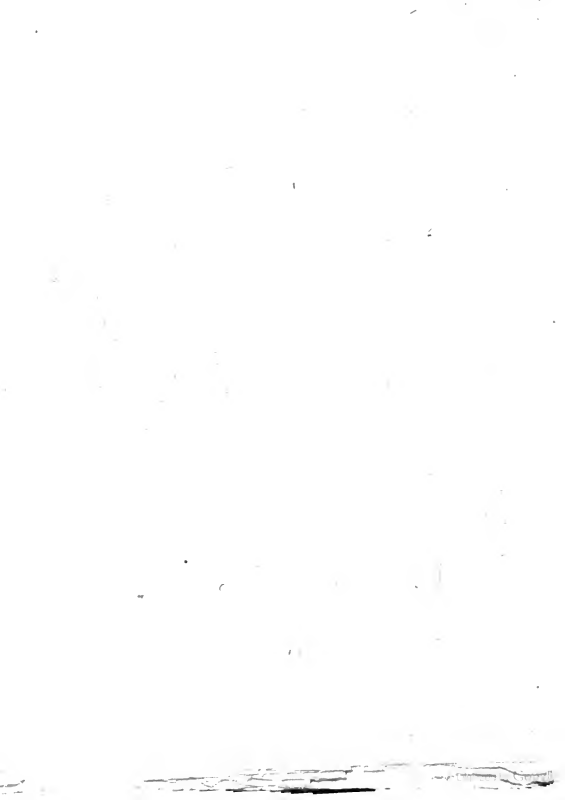




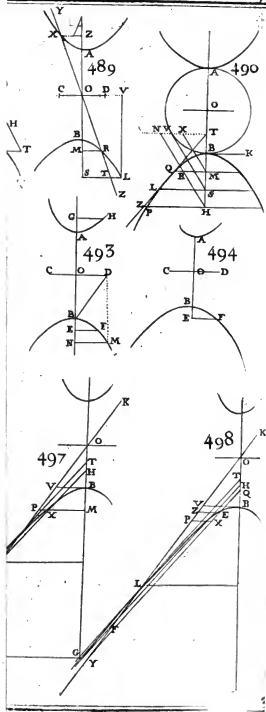






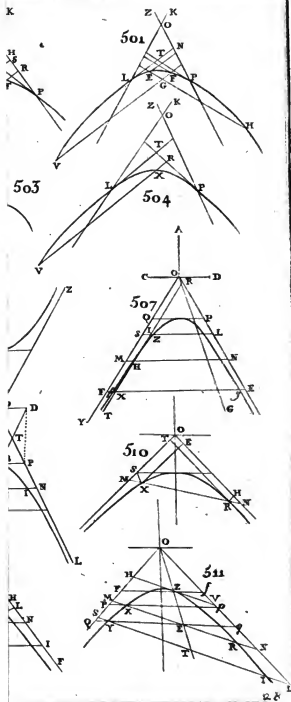


5-2-247

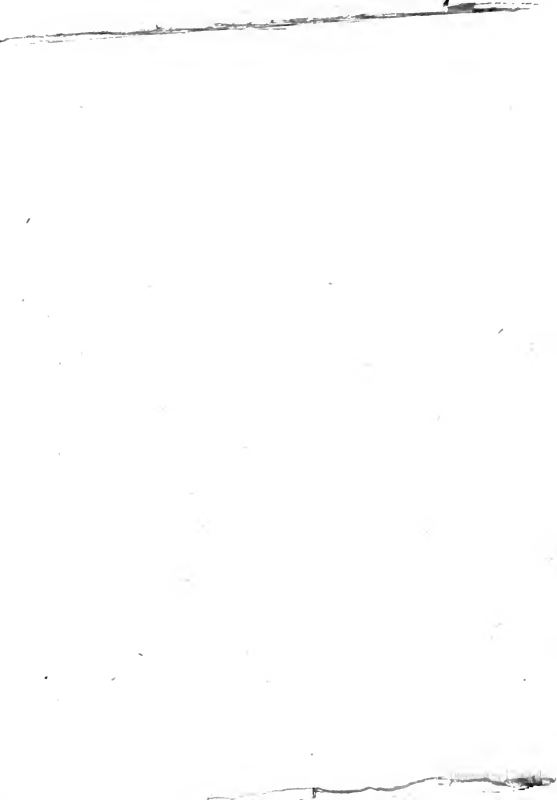


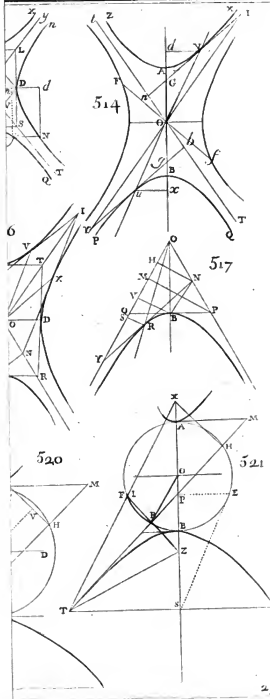


5-3-247

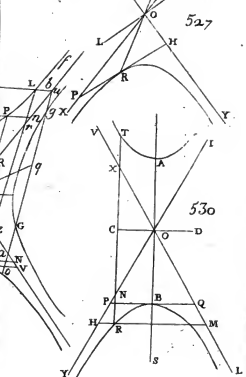
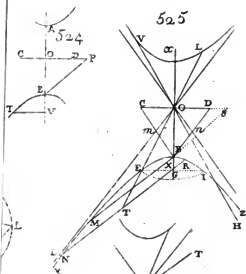












S 3-247





005663265



c8

